

# Feuille d'exercices n°14 : Espaces vectoriels

PTSI B Lycée Eiffel

10 mars 2016

## Vrai-Faux

1. Un sous-ensemble d'un espace vectoriel  $E$  qui est stable par somme et par produit par un réel est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace  $E$  est toujours un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. Une famille de  $n$  vecteurs dans un espace de dimension  $n$  est libre si et seulement si elle est génératrice.
4. Deux sous-espaces  $F$  et  $G$  d'un même espace  $E$  sont supplémentaires si  $F \cap G = \{0\}$  et  $F \cup G = E$ .
5. Les espaces vectoriels classiques  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont de dimension  $n$ .

## Exercice 1 (\*)

On se place dans l'ensemble  $E$  des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (il s'agit bien d'un espace vectoriel). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  ?

- fonctions paires
- fonctions admettant un minimum global
- fonctions s'annulant une infinité de fois sur  $\mathbb{R}$
- fonctions vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x^2)$
- fonctions admettant une tangente horizontale en  $x = 5$
- fonctions vérifiant  $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$
- fonctions admettant en  $+\infty$  une asymptote (horizontale ou oblique) ou une branche parabolique (de direction  $(Ox)$  ou  $(Oy)$ )

## Exercice 2 (\*)

Parmi tous les sous-ensembles suivants de  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, donner leur dimension ainsi qu'une base pour chacun d'eux.

1.  $\{P \in E \mid P(2) = 0\}$
2.  $\{P \in E \mid P(0) = 2\}$
3.  $\{P \in E \mid P + P'' = 0\}$
4.  $\{P \in E \mid P \in \mathbb{R}_1[X]\}$
5.  $\{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
6.  $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x) dx = 0\}$
7.  $\{P \in E \mid \int_0^2 P(x) dx = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$
8.  $\{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$
9.  $\{P \in E \mid P(X+1) = 2P(X)\}$

### Exercice 3 (\*\*)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$ , et déterminer si possible les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{F}$ .

1.  $E = \mathbb{R}^3$ ;  $\mathcal{F} = ((-1, 1, 1); (1, -1, 1); (1, 1, -1))$  et  $x = (2, 3, 4)$ .
2.  $E = \mathbb{R}_3[X]$ ;  $\mathcal{F} = (1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2))$  et  $x = X^3$ .
3.  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ;  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \right)$  et  $x = I_4$ .
4.  $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq 4, u_n = 0\}$ ;  $x = (-2, 3, 4, 1, 0, 0, \dots)$  (vous avez le choix pour  $\mathcal{F}$ !).

### Exercice 4 (\*)

On considère dans  $\mathbb{R}^3$  les deux sous-ensembles  $F = \{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 0\}$  et  $G = \{(2a + b, a - b, 3a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ . Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , et déterminer leur intersection  $F \cap G$ .

### Exercice 5 (\*)

On considère les matrices suivantes de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  :  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $E$  l'ensemble des matrices  $M$  s'écrivant

sous la forme  $M = aI + bJ + cK + dL$ , avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$ .

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel, et que  $(I, J, K, L)$  en forme une base.
2. Montrer, en les calculant explicitement, que  $J^2, K^2, L^2, J^3$  et  $L^3$  appartiennent à  $E$ .
3. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que  $JK, KJ, KL, LK, JL$  et  $LJ$  appartiennent aussi à  $E$ .
4. Établir enfin que le produit de deux matrices de  $E$  est encore une matrice de  $E$ .

### Exercice 6 (\*\*\*)

Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , et qu'ils sont supplémentaires.

- $E = \mathbb{R}^2$ ;  $F = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$  et  $G = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$ .
- $E = \mathbb{R}^3$ ;  $F = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((3, 2, 1))$ .
- $E = \mathbb{R}_2[X]$ ;  $F = \text{Vect}(X, X^2)$  et  $G = \{P \mid P' = 0\}$ .
- $E = \mathbb{R}_6[X]$ ;  $F = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction paire}\}$  et  $G = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction impaire}\}$ .
- $E = \mathcal{C}_0([-1; 1], \mathbb{R})$ ;  $F = \{f \in E \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0\}$  et  $G = \{\text{fonctions constantes}\}$ .
- $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$ ;  $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}$  et  $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$ .

## Exercice 7 (\*\*)

Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère la famille  $\mathcal{F} = ((1, 2, 0, 1); (2, 1, 3, -1); (4, 5, 3, 1))$ .

1. Déterminer si la famille  $\mathcal{F}$  est libre, et donner une base de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$ .
2. Décrire  $\mathcal{F}$  comme ensemble des solutions d'un système d'équations à déterminer.
3. On note  $G$  l'ensemble des solutions du système  $\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases}$ . Déterminer une base de  $G$ , ainsi que sa dimension.
4. Montrer que  $\mathbb{R}^4 = \text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$ . Déterminer la décomposition dans  $\text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$  du vecteur  $(6, 10, 8, 2)$ .

## Exercice 8 (\*)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , dont on précisera une base et la dimension.
2. Même question pour  $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ .

## Exercice 9 (\*\*\*)

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un même espace  $E$  de dimension finie, qui vérifient  $\dim(F) = \dim(G)$ .

1. Montrer que  $F \cap G$  admet un supplémentaire  $F'$  dans  $F$  et un supplémentaire  $G'$  dans  $G$  qui sont de même dimension.
2. Montrer que  $F'$  et  $G'$  ont une intersection réduite au vecteur nul.
3. En considérant des bases de  $F'$  et  $G'$ , construire un supplémentaire commun à  $F$  et  $G$  dans  $F + G$ .
4. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à  $F$  et  $G$  dans  $E$ .

## Exercice 10 (\*\*\*)

On se place dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on note  $\mathcal{S}$  le sous-espace constitué des matrices symétriques et  $\mathcal{A}$  celui constitué des matrices antisymétriques.

1. Donner la dimension de  $\mathcal{S}$  et celle de  $\mathcal{A}$ , ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.
2. On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que  $\mathcal{T}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , donner sa dimension, ainsi qu'une base.
3. On note désormais  $M$  l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
4. Déterminer la dimension et une base de  $M$ .
5. Déterminer la dimension de  $M \cap \mathcal{S}$ , donner un exemple de matrice symétrique appartenant à  $M$ , dont le coefficient sur la première ligne, première colonne vaut 1.
6. Déterminer la dimension de  $M \cap \mathcal{A}$ , donner un exemple de matrice antisymétrique appartenant à  $M$ , dont le coefficient sur la première ligne, troisième colonne vaut 1.
7. Montrer qu'il n'existe qu'une seule matrice dans  $M$  dont la première ligne est constituée des nombres 1, 2 et 3 (dans cet ordre), et donner cette matrice.