Feuille d'exercices n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 janvier 2015

Vrai-Faux

1. Non, ce n'est pas du tout ça : $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
2. Vrai.
3. Faux, s'il y a des remises, on utilise des listes.
4. Faux, il faut partir de $k = 0$ et surtout pas de $k = 1$.
5. Vrai, même si on ne l'a pas énoncée ainsi dans la cours, il suffit de décaler les indices.

Exercice 1 (*)

1. Si on tient vraiment à utiliser les outils du cours, il y en a $\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 60$.
2. On va supposer qu'il prend deux entrées différentes, ce qui laisse $\binom{4}{2} \times 3 = 18$ possibilités.
3. On a désormais $\binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{5}{2} = 6 \times 3 \times 10 = 180$ possibilités.

Exercice 2 (**)

Commençons par remarquer qu'il y a au total $13^4 = 28\ 561$ tirages possibles (ce sont des listes).

- Au moins une boule blanche : on passe par le complémentaire, il y a 8^4 tirages ne comportant que des boules noires, donc $13^4 - 8^4 = 24\ 465$ tirages avec au moins une boule blanche.
- Au plus une boule noire : on sépare en deux cas. Il y a soit zéro boule noire (5^4 cas) soit une boule noire ($5^3 \times 8 \times \binom{4}{1}$, le coefficient binomial étant là pour le choix de la position de la boule noire), donc $5^4 + 5^3 \times 8 \times \binom{4}{1} = 4\ 625$ tirages au total.
- Trois boules noires puis une blanche : $8^3 \times 5 = 2\ 560$ tirages (pas de choix pour l'ordre ici).
- Deux noires et deux blanches : $8^2 \times 5^2 \times \binom{4}{2} = 9\ 600$ tirages possibles (encore une fois, le coefficient binomial correspond au nombre de choix pour les deux boules blanches sur les quatre tirages).

Exercice 3 (**)

Il y a au total $\binom{21}{5}$ tirages possibles.

- Il y a 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, donc $\binom{17}{5}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc $\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$ tirages avec au moins un multiple de 5.

- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a $\binom{11}{4} + \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{3}$ tirages possibles.
- Ni le 1 ni le 21 : par passage au complémentaire, $\binom{21}{5} - \binom{19}{5}$ tirages.

Exercice 4 (*)

1. On a assez simplement $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B| = 112 - 67 = 45$.
2. Il suffit de faire une somme : $|C| = |A \cap C| + |(B \cap C) \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 32 + 5 + 56 = 93$.
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre de $|A \cup B \cup C| = |A| + |B \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 112 + 22 + 56 = 190$. Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4. $A \backslash (B \cup C) = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$.

Exercice 5 (** à ***)

- Aucune condition : $\binom{32}{5} = 201\ 376$ tirages.
- Deux Rois : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\ 656$ (on choisit deux cartes parmi les quatre Rois et trois parmi les 28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire, $\binom{32}{5} - \binom{24}{5} = 158\ 872$
- Un As et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait $\binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$ (l'As de carreau ; un autre carreau parmi les sept restants ; et trois cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) $+ \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$ (un As qui n'est pas un carreau, deux carreaux qui ne sont pas des As, et trois autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des As), soit 22 540 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 : $\binom{24}{5} = 42\ 504$ tirages (il y a 24 cartes au-dessus du 9).
- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les couleurs des deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} = 24\ 192$ tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : 4 choix pour la couleur, puis 5 cartes à choisir parmi les 8 de la couleur, soit $4 \times \binom{8}{5} = 224$ tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

Exercice 6 (***)

1. Il y a $\binom{6}{2}$ parties à 2 éléments dans E (c'est la définition d'un coefficient binomial !). Soit A l'une d'entre elles, par exemple $A = \{1; 2\}$. Une partie B vérifiant $A \cup B = E$ doit nécessairement contenir 3, 4, 5 et 6 (puisqu'ils ne sont pas dans A, et un sous-ensemble quelconque de $\{1; 2\}$. Il y a donc 2^2 telles parties B (pour chaque A possible).
2. De la même façon, si A est une partie à k éléments, B doit nécessairement contenir les éléments qui ne sont pas dans A, et un quelconque sous-ensemble des k éléments de E, ce qui laisse

2^k possibilités pour B (on a, pour chaque élément de A, 2 possibilités : soit on le prend, soit on ne le prend pas). Pour $k = 0$, c'est-à-dire si $A = \emptyset$, on a bien une seule possibilité pour B (E tout entier), pour $k = 1$, il y en a 2 (soit B contient l'unique élement de A, soit non), etc, jusqu'au cas où $k = 6$, c'est-à-dire $A = E$, où on peut prendre pour B n'importe quel sous-ensemble de E, ce qui laisse 2^6 possibilités.

3. Au total, il y a $\binom{6}{0} \times 2^0 + \binom{6}{1} \times 2^1 + \cdots + \binom{6}{6} \times 2^6$ possibilités, soit $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^k 1^{n-k}$. On reconnait une formule du binôme, qui vaut $(2+1)^6 = 3^6 = 729$.
4. Exactement de la même façon, on obtiendra $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ possibilités, soit 3^n. Une autre façon de trouver ce résultat est de constater que, pour chacun des n éléments, on a trois possibilités : soit il appartient seulement à A, soit seulement à B, soit à $A \cap B$ (il n'a pas le droit de n'appartenir ni à A ni à B si on veut avoir $A \cup B = E$).

Exercice 7 (*)

Application directe de l'exemple vu en cours : il y a $\frac{10!}{4! \times 4!} = 6\,300$ anagrammes pour MISSISSIPI et $\frac{11!}{5! \times 2! \times 2!} = 83\,160$ pour ABRACADABRA.

Exercice 8 (**)

Pas vraiment de méthode générale, on va dénombrer au cas par cas :

- s'il n'y a pas d'ex æquo, $4! = 24$ classements.
- s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.
- s'il y a trois ex æquo, $\binom{3}{4} \times 2 = 8$ classements (il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).
- s'il y a deux ex æquo, $\binom{2}{4} \times 3! = 36$ classements.
- enfin, s'il y a deux fois deux ex æquo, $\binom{4}{2} = 6$ classements (il suffit de choisir les deux ex æquo de tête).

Il y a donc au total 75 classements possibles.

Exercice 9 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton : $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$; $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$ et $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 10 (***)

La première (une fois ajouté le coefficient binômial manquant) est une application directe du binôme : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$. Pour la deuxième, il est en fait plus facile d'utiliser une des formules vues en cours, sachant qu'on peut oublier $k = 0$ dans la somme puisque le terme est nul :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n \times 2^{n-1}$. Enfin, pour la dernière, on utilise la même astuce mais en commençant par calculer une autre somme : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{k-1} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. Maintenant, reste à remarquer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 11 (*)

C'est un calcul ignoble (on multiplie par 2 pour ne pas avoir de fraction) :
$2\left(\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2}\right) = n(n-1) - (n-p)(n-p-1) - (n-q)(n-q-1) + (n-p-q)(n-p-q-1) = n^2 - n - n^2 + np + n + np - p^2 - p - n^2 + nq + n + nq - q^2 - q + n^2 - np - nq - n - np + p^2 + pq + p - nq + pq + q^2 + q = 2pq$, d'où le résultat.

Exercice 12 (**)

1. On a k cases à noircir sur un total de np, donc $\binom{np}{k}$ grilles possibles.
2. Il reste $k-4$ cases à noircir parmi $np-4$, donc $\binom{np-4}{k-4}$ (naturellement, on doit avoir $k \geq 4$).
3. Il faut choisir les deux coins, puis noircir $k-2$ cases parmi les $np-4$ qui ne sont pas des coins, donc $\binom{4}{2} \times \binom{np-4}{k-2}$ possibilités.
4. Cela suppose que $k \leq n$. Il faut alors choisir les k lignes contenant une case parmi les n possibles, puis il reste pour chacune de ces lignes p choix pour la case à noircir, donc $\binom{n}{k} \times p^k$ grilles possibles.
5. La grille a donc n lignes et n colonnes, et on cherche à noircir une case par ligne, sans en mettre deux dans la même colonne. Il y a n choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, $n-1$ choix pour la case de la deuxième ligne (il ne faut pas la mettre dans la même colonne que la première), $n-2$ pour la troisième etc. Quand on arrive à la dernière ligne, on n'a plus le choix pour la dernière case à noircir (il ne reste qu'une seule colonne vierge). On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ grilles possibles.
6. On aurait 9! choix s'il n'y avait pas la condition supplémentaire sur les petits carrés. Le mieux est de recommencer une raisonnement similaire à celui de la question précédente :
   - il y a 9 possibilités pour le 1 de la première ligne.
   - il y a seulement 6 possibilités ensuite pour le 1 de la deuxième ligne (trois cases à éviter qui sont dans le même petit carré que le premier 1).
   - plus que 3 possibilités pour la troisième ligne (un seul petit carré vierge en haut de la grille).
   - à nouveau 6 possibilités pour la quatrième ligne (plus de problème de petit carré, mais tout de même trois colonnes à éviter).
   - 4 pour la cinquième ligne (deux colonnes libres dans deux petits carrés).
   - 2 pour la sixième (deux colonnes dans le dernier petit carré médian).
   - 3 sur la septième ligne (plus que trois colonnes libres).
   - 2 et 1 pour les deux dernières.

Soit $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46\ 656$ façons de placer les 1.

7. Au total, il y a $\binom{81}{9}$ façons de placer neuf 1 dans une grille de 81 cases, soit 260 887 834 350 possibilités. La proportion de placements « Sudoku-compatibles » est donc extrêmement faible !

Exercice 13 (**)

1.
   - Pour $n = 1$, le seul mot terne est a.
   - Pour $n = 2$, un mot terne devrait commencer et finir par a, tout en ayant ses deux lettres (qui sont adjacentes) distinctes, c'est impossible. Il n'y a donc pas de mot terne de longueur 2.
   - Pour $n = 3$, le mot doit commencer et finir par a, et la lettre médiane ne doit pas être un a, ce qui laisse les deux possibilités aba et aca.
   - Pour $n = 4$, les deux lettres médianes ne peuvent à nouveau être des a (elles cotoient soit le a initial soit le a final), et doivent en plus être distinctes, ce qui ne laisse que les deux possiblités $abca$ et $acba$.
   - Pour $n = 5$, on peut choisir de mettre un a en lieu de mot, auquel cas les deuxième et quatrième lettre peuvent être un b ou un c indépendamment l'une de l'autre ; mettre un b au milieu, ce qui impose de l'encadrer par deux c (puisque ces lettres cotoient à la fois un a et un b) ; ou enfin un c médian encadré par deux b. Cela fait un total de 6 possibilités : $ababa$, $abaca$, $acaba$, $acaca$, $acbca$ et $abcba$.
   - Pour $n = 6$, soit on met un a en troisième, on a deux possibilités pour la deuxième lettre (cf le cas $n = 2$), et deux pour les lettres 4 et 5 (cf le cas $n = 3$) ; soit on met un a en quatrième, ce qui donne quatre autres possibilités ; soit on ne met pas du tout de a en-dehors des extrêmités, et on a deux possibilités (on alterne des b et des c en commençant par l'un ou l'autre). Soit un total de 10 mots ternes de longueur 6 : $ababca$, $abacba$, $acabca$, $acacba$, $abcaba$, $acbaba$, $abcaca$, $acbaca$, $abcbca$ et $acbcba$.
2. Considérons donc l'ensemble des mots termes de longueur n, pour un certain entier $n \geq 3$, et séparons-les en deux catégories selon la nature de la lettre placée en position $n - 2$ dans le mot.
   - s'il s'agit d'un a, le mot obtenu en supprimant les deux dernières lettres de notre mot était déjà terne (il commençait et finissait par a, et ne pouvait certainement pas avoir deux lettres consécutives identiques si on veut que notre mot à nous soit terne). Par ailleurs, les deux dernières lettres de notre mot sont soit ba, soit ca. Réciproquement, à tout mot terne de longueur $n - 2$, on peut bien associer deux mots ternes de longueur n en ajoutant soit ba soit ca à la fin du mot. Cette construction nous donne déjà $2 \times t_{n-2}$ mots ternes de longueur n.
   - si au contraire notre lettre numéro $n-2$ n'est pas un a, mais par exemple un b, alors notre mot s'achève nécessairement par bca (s'il s'agit d'un c il s'achève par cba et le raisonnement est le même). Considérons alors le mot obtenu en supprimant l'avant-dernière lettre de notre mot (ici le c), on retombe alors sur un mot terne (de longueur $n - 1$) car on n'a sûrement pas fait apparaitre de lettres adjacentes identiques. Réciproquement, à partir de n'importe quel mot terne de longueur $n - 1$, on peut en construire un (et un seul) en insérant la bonne lettre en avant-dernière position : si le mot de longueur $n - 1$ finit par ba, on introduit un c entre le b et le a ; s'il finit par ca, on introduit un b. On obtient ainsi exactement t_{n-1} nouveaux mots ternes de longueur n, qui sont évidemment distincts des précédents (puisque la lettre numéro $n - 2$ n'est pas la même).

   Globalement, on a bien trouvé $2t_{n-2} + t_{n-1}$ mots ternes de longueur n, soit $t_n = 2t_{n-2} + t_{n-1}$.
3. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 - x - 2 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet donc deux racines $r = \frac{1+3}{2} = 2$,

et $s = \dfrac{1-3}{2} = -1$. On peut donc écrire t_n sous la forme $t_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$, où α et β sont deux constantes déterminées par les deux premiers termes de la suite. Ici, $t_1 = 2\alpha - \beta = 1$, et $t_2 = 4\alpha + \beta = 0$. En additionnant les deux équations, on obtient $6\alpha = 1$, soit $\alpha = \dfrac{1}{6}$; puis $\beta = 2\alpha - 1 = -\dfrac{2}{3}$. Finalement, $t_n = \dfrac{1}{6} \times 2^n - \dfrac{2}{3} \times (-1)^n = \dfrac{2^{n-1} - 2(-1)^n}{3}$.

Exercice 14 (***)

1. Prenons par exemple l'application f suivante : $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 1$, $f(4) = 4$ et $f(5) = 2$, il s'agit d'une involution (on vérifie aisément que $f \circ f = \mathrm{id}$), avec un point fixe. On ne peut pas trouver d'involution sans point fixe de E : par définition, $f(1) = k \neq 1$, et pour que f soit une involution, on doit avoir $f(k) = 1$. On choisit ensuite $f(2)$ (si $k \neq 2$, sinon on passe à 3), qui est lui-même envoyé sur 2, et il reste un élément de l'ensemble qui doit être envoyé sur lui-même. En fait, plus généralement, on aura toujours $S_n = 0$ lorsque n est un entier impair.
2. Si E contient un seul élément, il existe une seule involution (avec un point fixe), l'identité elle-même. Lorsque 2 contient deux éléments, il y en a deux (soit on ne bouge rien, soit on échange les deux éléments), dont une a un point fixe. Avec trois éléments, il y a quatre involutions qui ont toutes un point fixe : l'identité, l'application échangeant 1 et 2 (en laissant 3 fixe), celle échangeant 1 et 3, et enfin celle échangeant 2 et 3. Filament, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$ et $T_3 = 4$; $S_1 = S_3 = 0$ et $S_2 = 1$.
3. L'inégalité $S_n \leq T_n$ est triviale puisqu'une involution sans point fixe est un cas particulier d'involution. La deuxième l'est à peine moins puisque toute involution est nécessairement bijective (par définition, une involution est sa propre réciproque) et qu'il y a au total $n!$ bijections sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.
4. (a) Si on impose $f(1) = k$ (avec bien sûr $k \neq 1$), on doit avoir $f(k) = 1$. Il ne reste plus qu'à choisir les images des n éléments restants de E de façon à ce que la restriction de f à ces n éléments soit une involution sans point fixe, ce qui donne S_n possibilités. Reste à compter le nombre de valeurs de k possibles : il y en a $n+1$, d'où $S_{n+2} = (n+1)S_n$.
   (b) Pour construire une involution (avec points fixes autorisés), on procède comme précédemment : soit on choisit $f(1) = k \neq 1$, ce qui impose $f(k) = 1$, et on choisit une involution (avec points fixes) des n entiers restants, ce qui laisse donc $(n+1)T_n$ possibilités ; soit on choisit $f(1) = 1$, et il ne reste qu'à choisit une involution des $n+1$ entiers restants, ce qui fait T_{n+1} possibilités. On en déduit donc que $T_{n+2} = T_{n+1} + (n+1)T_n$.
5. On sait déjà que $S_{2n-1} = 0$ pour tout entier naturel n. De plus, la relation $S_{2n} = (2n-1)S_{2n-2}$ combinée à la condition initiale $S_2 = 1$ implique que $S_{2n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ (on peut faire une récurrence si on tient vraiment à être rigoureux). On peut écrire ça plus joliment : $S_{2n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
6. L'égalité des deux sommes est une conséquence immédiate de symétrie des coefficients binomiaux (on remplace k par $n-k$ pour passer d'une somme à l'autre). Comme on ne voit vraiment pas d'où peut sortir cette formule, on va procéder par récurrence double : pour $n = 1$, $T_1 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}S_k = S_0 + S_1 = 1$ (si vous n'êtes pas convaincu par le fait que $S_0 = 1$, réfléchissez-y mieux : il y a une involution de l'ensemble vide vers lui-même, qui consiste à ne rien faire, et cette involution n'a pas de point fixe puisqu'il n'y a pas d'éléments dans l'ensemble ! Sinon, on peut se contenter de constater que la formule obtenue

pour S_{2n} donne bien $S_0 = 1$). La formule est donc vraie au rang 1. Vérifions au rang 2 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} S_k = S_0 + 2S_1 + S_2 = 2 = T_2$, ça marche.

Passsons à l'hérédité : $T_{n+2} = T_{n+1} + (n+1)T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k + (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$. On utilise le fait que $(n+1)\dbinom{n}{k} = (k+1)\dbinom{n+1}{k+1}$ (formule sans nom) pour obtenir $T_{n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k + \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n+1}{k+1} S_k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_{k+2}$ en exploitant la relation de récurrence sur la suite (S_n). On regroupe le tout : $T_{n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k + \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+1}{k-1} S_k = S_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2}{k} S_k + S_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} S_k$, ce qui prouve la propriété au rang $n+2$ (on a exploité la relation de Pascal pour la fin du calcul, et isolé les termes extrêmes des deux sommes, en utilisant en passant que $S_1 = 0$).

En reprenant la formule trouvée pour S_{2n}, on peut donc écrire, $T_{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \times \frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{2^k k!(2n-2k)!}$. De même pour les entiers impairs, $T_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{2^k k!(2n+1-2k)!}$. On ne peut pas vraiment obtenir de formule plus simple. On peut donc calculer $T_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{10!}{2^k k!(10-2k)!} = \frac{10!}{10!} + \frac{10!}{2 \times 8!} + \frac{10!}{4 \times 2 \times 6!} + \frac{10!}{8 \times 6 \times 4!} + \frac{10!}{16 \times 24 \times 2} + \frac{10!}{32 \times 120} = 9\ 496$. Par rapport à $10! = 3\ 628\ 800$, on constate que seule une petite proportion des bijections sont des involutions (un peu moins de 0.3%).

Problème 1 (***)

1. Il n'y a qu'une seule partition de E_1. Pour E_2, on a deux possibilités : soit regrouper les deux éléments (un seul sous-ensemble dans la partition), soit les séparer (deux sous-ensembles). Enfin, pour E_3, on peut regrouper les trois éléments (un seul sous-ensemble), les séparer tous les trois, ou faire une partition en deux sous-ensembles dont l'un contient un élément et l'autre les deux qui restent (trois possibilités selon le choix de l'élément isolé). Il y a donc cinq partitions différentes de E_3.
2. S'il y a n sous-ensembles non vides et disjoints, chacun doit comporter exactement 1 élément, et il n'y a donc qu'une seule partition possible. S'il y a $n-1$ sous-ensembles, ils contiennent tous un élément, sauf un qui en contient deux. Il faut donc choisir quels sont les deux éléments qui sont regroupés, ce qui laisse $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ partitions.
3. Il y a deux types de partitions : celles qui ont 7 sous-ensembles réduits à un élément et le huitième qui en contient 3 (au nombre de $\dbinom{10}{3}$, de manière similaire à la question précédente) ; et celles qui ont 6 sous-ensembles réduits à deux éléments et les deux derniers qui en contiennent 2. Ces dernières sont au nombre de $\dfrac{1}{2}\dbinom{10}{2}\dbinom{8}{2}$ (il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, les deux du deuxième parmi ceux qui restent, et diviser par deux car l'ordre n'est pas important). Au total donc, $\dbinom{10}{3} + \dfrac{1}{2}\dbinom{10}{2}\dbinom{8}{2}$ partitions.

4. Le même raisonnement conduit à $\binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.

5. (a) Il faut tout simplement choisir l'élément isolé, et il y a n possibilités pour cela, ou si l'on préfère $\binom{n}{1}$ possibilités.

   (b) De la même façon, il faut choisir les deux éléments du premier ensemble, soit $\binom{n}{2}$ partitions possibles.

   (c) En général, on aura $\binom{n}{k}$ partitions en deux sous-ensembles dont l'un contient k éléments. Attention tout de même, k est compris entre 1 (le premier ensemble n'a pas le droit d'être vide) et $n-1$ (le deuxième ne doit pas être vide non plus !). Autre piège, si on fait la somme pour k variant entre 1 et $n-1$, on compte en fait deux fois chaque partition (en effet, on obtient la même partition en échangeant le rôle du premier et du deuxième ensemble : par exemple, les partitions obtenues pour $k=1$ sont les mêmes que celles obtenues pour $k=n-1$). Il y a donc au total $\frac{1}{2}\sum_{k=1} k = n-1 \binom{n}{k} = \frac{1}{2}(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$ partitions en deux sous-ensembles.

6. (a) Si E est constitué de $2 \times 1 = 2$ éléments, il n'y a qu'une façon de le partitionner en sous-ensembles à deux éléments, donc $a_1 = 1$. Si E a quatre éléments, on peut le partitionner de trois façons en deux paires (il faut choisir qui on case avec le premier élément, l'autre paire est alors imposée), donc $a_2 = 3$. Enfin, si E contient 6 éléments, on a cinq choix pour l'élémént à caser avec 1, et enuite trois possibilités à chaque fois pour apparier les quatre éléments restants, donc $a_3 = 5 \times 3 = 15$.

   (b) On fait comme ci-dessus : si E contient $n = 2p$ éléments, on commence par choisir l'élément qu'on va apparier avec 1, ce pour quoi on a $n-1 = 2p-1$ choix. Une fois ce choix fait, il reste à partitionner les $n-2 = 2p-2 = 2(p-1)$ éléments restants en paires, ce pour quoi on a par définition a_{p-1} possibilités. Cela laisse bien $(2p-1)a_{p-1}$ possibilités pour séparer E en paires, donc $a_p = (2p-1)a_{p-1}$.

   (c) D'après la question précédente, on a $a_p = (2p-1) \times a_{p-1} = (2p-1) \times (2p-3)a_{p-2} = (2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 5\times 3$ (ce qui est cohérent avec les calculs de a_2 et a_3). Autrement dit $a_p = \frac{(2p)\times(2p-1)\times\cdots\times 5\times 4\times 3\times 2}{(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 4\times 2} = \frac{(2p)!}{2\times p\times 2\times(p-1)\times\cdots\times 2\times 2\times 2\times 1} = \frac{(2p)!}{2^p p!}$.

   (d) Le nombre demandé est exactement $a_{10} = \frac{20!}{2^{10}\times 10!} = 19\times 17\times\cdots\times 5\times 3 = 654\ 729\ 075$. Si on ne considère que des couples hétéro avec 10 filles et 10 garçons, la première fille (soyons galants) a 10 choix pour son compagnon, la deuxième n'en a plus que 9 etc, et la dernière fille n'a plus le choix (ceci n'est pas censé modéliser ce qui se passe dans la vraie vie), soit $10! = 3\ 628\ 800$ possibilités. Autrement dit, si on apparie aléatoirement 10 filles et 10 garçons, on à peine plus d'une chance sur 200 d'obtenir dix couples hétérosexuels.

Problème 2 (****)

Exemples et généralités

1. Soit f une application surjective de $\{(1;2;3)\}$ dans $\{(1;2)\}$. Les triplets possibles pour $(f(1);f(2);f(3))$ sont $(1;1;2)$; $(1;2;1)$; $(1;2;2)$; $(2;1;1)$; $(2;1;2)$ et $(2;2;1)$, ce qui nous donne $S_{3,2} = 6$.

   De même, si g est une application surjective de $\{(1;2;3;4)\}$ dans $\{(1;2)\}$, les quadruplets possibles pour $(g(1);g(2);g(3);g(4))$ sont $(1;1;1;2)$; $(1;1;2;1)$; $(1;1;2;2)$; $(1;2;1;1)$; $(1;2;1;2)$;

$(1;2;2;1)$; $(1;2;2;2)$; $(2;1;1;1)$; $(2;1;1;2)$; $(2;1;2;1)$; $(2;1;2;2)$; $(2;2;1;1)$; $(2;2;1;2)$ et $(2;2;2;1)$, d'où $S_{4,2} = 14$.

2. Une application ayant pour ensemble de départ $\{1;2;\dots;n\}$ ne peut prendre qu'au plus n valeurs différentes, donc ne pourra pas être surjective dans $\{1;2;\dots;p\}$ si $n < p$. Autrement dit, $S_{n,p} = 0$ dans ce cas.
3. La seule application ayant pour ensemble d'arrivée l'ensemble réduit à un seul élément $\{1\}$ est l'application constante égale à 1 (quel que soit l'ensemble de départ). Elle est par ailleurs surjective dès que $n \geq 1$, donc $S_{n,1} = 1$ pour $n \geq 1$.
4. Une application surjective de $\{1;2;\dots;n\}$ dans lui-même n'est autre qu'une permutation de l'ensemble $\{1;2;\dots;n\}$, qui sont au nombre de $n!$, donc $S_{n,n} = n!$.

Détermination de $S_{n,2}$

1. On a vu plus haut que $S_{2,2} = 2! = 2$.
2. Considérons une application surjective f de $\{1;2;\dots;n+1\}$ dans $\{1;2\}$, et supposons que $f(n+1) = 1$. Pour que f soit surjective, il suffit alors que la restriction de f à $\{1;2;\dots;n\}$ soit déjà surjective (u_n possibilités) ou que $f(1) = f(2) = \dots = f(n) = 2$. Il y a de même $u_n + 1$ applications surjectives pour lesquelles $f(n+1) = 2$, ce qui nous donne bien au total $u_{n+1} = 2(u_n + 1)$.
3. La suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique. Son équation de point fixe, $x = 2x + 2$, a pour solution $x = -2$. Posons donc $v_n = u_n + 2$, on a alors $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 2u_n + 2 + 2 = 2(u_n + 2) = 2v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et vérifiant $v_2 = u_2 + 2 = 4$. On en déduit que $\forall n \geq 2$, $v_n = 4 \times 2^{n-2} = 2^n$, puis $u_n = v_n - 2 = 2^n - 2$.
4. Il y a au total 2^n applications de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2\}$. Parmi celles-ci, les seules qui ne sont pas surjectives sont les deux applications constantes respectivement égales à 1 et à 2. Le nombre d'applications surjectives est donc $2^n - 2$.

Détermination de $S_{n,3}$

1. Toujours en revenant à la dernière question de la première partie, $v_3 = S_{3,3} = 3! = 6$.
2. Soit g une application surjective de $\{1;2;\dots;n+1\}$ dans $\{1;2;3\}$ telle que $g(n+1) = 3$. Il y a alors deux possibilités pour la restriction de g à $\{1;2;\dots;n\}$: soit elle est surjective dans $\{1;2;3\}$, soit elle est surjective dans $\{1;2\}$ (sans prendre la valeur 3). Ces deux possibilités ne pouvant se produire simultanément, il y a $v_n + u_n$ applications g convenables. Un raisonnement identique dans le cas où $g(n+1) = 1$ et $g(n+1) = 2$ nous permet d'obtenir au total $v_{n+1} = 3(v_n + u_n)$. Comme $u_n = 2^n - 2$, on a donc $v_{n+1} = 3v_n + 3 \times 2^n - 6$.
3. Vous pouvez écrire un programme Python si ça vous chante, mais on va considérer que cette question aurait du être supprimée !
4. D'après le résultat de la question 2, $w_{n+1} = v_{n+1} - 3 = 3v_n + 3 \times 2^n - 6 - 3 = 3(v_n - 3 + 2^n) = 3(w_n + 2^n)$.
5. Calculons $t_{n+1} = w_{n+1} + 3 \times 2^{n+1} = 3(w_n + 2^n + 2^{n+1}) = 3(w_n + 2^n + 2 \times 2^n) = 3(w_n + 3 \times 2^n) = 3t_n$. La suite (t_n) est donc bien géométrique de raison 3.
6. Il ne reste plus qu'à remonter : $t_3 = w_3 + 3 \times 2^3 = w_3 + 24 = v_3 - 3 + 24 = v_3 + 21 = 6 + 21 = 27$. On en déduit que $t_n = 27 \times 3^{n-3} = 3^n$, puis $w_n = 3^n - 3 \times 2^n$ et enfin $v_n = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.
7. Les applications de $\{1;2;\dots n+1\}$ dans $\{1;2;3\}$ peuvent être classées selon le nombre de valeurs différentes qu'elles prennent : soit elle prennent les trois valeurs possibles, et il y a par définition v_n telles applications ; soit elles en prennent exactement deux, qu'on peut choisir de $\binom{3}{2} = 3$ façons différentes, et il y a à chaque fois u_n telles applications, donc $3u_n$ au total ; soit elles sont constantes, ce pour quoi on a 3 possibilités. Comme il y a un total de

3^n applications de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2;3\}$, on obtient la relation $3^n = v_n + 3u_n + 3$, donc $v_n = 3^n - 3u_n - 3 = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3$.

Détermination de $S_{n+1,n}$

1. L'application f étant surjective, tout élément de $\{1;2;\dots;n\}$ admet (au moins) un antécédent par f. Choisissons donc un antécédent pour chaque élément de l'ensemble d'arrivée, cela nous donne n éléments de $\{1;2.\dots;n+1\}$ ayant des images distinctes par f. Le dernier élément de $\{1;2;\dots;n+1\}$ a une image identique à l'un des autres éléments de $\{1;2;\dots;n+1\}$ (puisqu'on a déjà épuisé tous les éléments de l'ensemble d'arrivée), et cette image est bien l'unique élément de notre ensemble d'arrivée ayant exactement deux antécédents.
2. Il faut choisir deux éléments dans un ensemble en contenant $n+1$, il y a donc $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ possibilités.
3. Une fois choisis l'élément de l'ensemble d'arrivée ayant deux antécédents (n possibilités) et les deux antécédents en question, les $n-1$ éléments restants dans chaque ensemble sont reliés de façon bijective par f, ce qui laisse $(n-1)!$ possibilités. On a donc $S_{n+1,n} = n \times \frac{n(n+1)}{2} \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}$.

Cas général

1. Considérons une application surjective f de $\{1;2;\dots;n\}$ dans $\{1;2;\dots;p\}$. On a p choix possibles pour l'image de n par cette application, et la restriction de f à $\{1;2;\dots;n-1\}$ est soit surjective vers $\{1;2;\dots;p\}$ (il y a pour cela $S_{n-1,p}$ possibilités), soit elle prend toutes les valeurs sauf $f(n)$ (il y a pour cela $S_{n-1,p-1}$ possibilités). Cela nous donne bien la relation de récurrence $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
2.

$S_{n,p}$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$n=0$	0	0	0	0	0	0
$n=1$	0	1	0	0	0	0
$n=2$	0	1	2	0	0	0
$n=3$	0	1	6	6	0	0
$n=4$	0	1	14	36	24	0
$n=5$	0	1	30	150	240	120

3. Calculons séparément les membres de gauche et de droite : $\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{p!}{(p-k)!(k-j)!j!}$. De l'autre côté, $\binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j} = \frac{p!}{j!(p-j)!}\frac{(p-j)!}{(k-j)!(p-k)!} = \frac{p!}{j!(k-j)!(p-k)!}$. Les deux membres sont bien égaux.
4. On a, en utilisant l'égalité précédente, $\sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{k=p}(-1)^k\binom{p}{q}\binom{p-q}{k-q}$. Le premier coefficient binomial ne dépendant pas de k, on peut le sortir de la somme. On va par ailleurs effectuer le changement d'indice $j = k-q$ pour se ramener à $\binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}(-1)^{j+q}\binom{p-q}{j} = \binom{p}{q}\sum_{j=0}^{j=p-q}\binom{p-q}{j}1^j(-1)^{j+q}$. Comme $(-1)^{j+q} = (-1)^{j+q-2j} = (-1)^{q-j}$, on peut reconnaitre dans la somme une formule du binome de Newton égale à $(1-1)^{p-q} = 0$, d'où la nullité de la somme initiale.

5. Il faut choisir les j valeurs qui seront prises par notre application (il y a pour cela $\binom{p}{j}$ choix), et il reste ensuite à choisir une application surjective d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à j éléments, ce pour quoi on a par définition $S_{n,j}$ possibilités. Les applications prenant exactement j valeurs sont donc au nombre de $\binom{p}{j}S_{n,j}$.
6. Il y a au total p^n applications de $\{1;2;\ldots;n\}$ vers $\{1;2;\ldots;p\}$, et chacune d'elle prend un nombre de valeurs compris entre 1 et p. En sommant les expressions obtenues à la question précédente pour j variant de 1 à p, on obtiendra donc p^n (on ne compte manifestement pas deux fois une même application).
7. Tentons donc de calculer la somme de droite, en inversant la somme double qui apparait dès que possible :
$(-1)^p \sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k \binom{p}{k} k^n = (-1)^p \sum_{k=0}^{k=p}(-1)^k \binom{p}{k} \sum_{j=1}^{j=k} \binom{k}{j} S_{n,j} = (-1)^p \sum_{j=1}^{j=p} S_{n,j} \sum_{k=j}^{k=p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{j}$
La somme de droite est justement celle dont on a montré qu'elle était nulle pour toutes les valeurs de j inférieures ou égales à $p-1$. Le seul terme restant est donc $(-1)^p S_{n,p} \sum_{k=p}^{k=p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{p} = (-1)^{2p} S_{n,p} = S_{n,p}$. L'égalité demandée est donc prouvée.