Feuille d'exercices n°16 : Applications linéaires

PTSI B Lycée Eiffel

31 mars 2016

Exercice 0 (*)

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, déterminer pour chacune des applications $\varphi : E \to E$ définies par $\varphi(f) = g$ si elles sont linéaires ou non :

- $g(x) = \int_0^x f(t)\ dt$
- $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)\ dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t^2)\ dt$
- $g(x) = \int_0^x f^2(t)\ dt$
- $g(x) = \int_0^x t^2 f(t)\ dt$
- $g(x) = x^2 \int_0^x f(t)\ dt$
- $g(x) = f''(x)$
- $g(x) = f''(x^2)$
- $g(x) = f''(x)^2$
- $g(x) = f''(0)x^2$
- $g(x) = f''(x) + x \int_0^x f'(t)\ dt$
- $g(x) = \int_0^x f(t)\ dt f'(t)$

Exercice 1 (*)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images des vecteurs de la base canonique soient $(1, -1, 2)$, $(-3, 2, -1)$ et $(-7, 4, 1)$.

1. Déterminer une expression explicite de u.
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1, 1, 8)$ et de $(-2, 1, 3)$.
3. u est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 2 (***)

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $u^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$, et que $id_E + u$ est un automorphisme.
2. Dans le cas général, montrer que $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(u^2) = \ker(u)$; et que $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 3 (**)

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et on définit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = z + a\overline{z}$, où a est un nombre complexe fixé. Montrer que f est linéaire, Déterminer son noyau, et donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit bijective.

Exercice 4 (**)

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note $F = \text{Vect}((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z) \mid 2x + y - z = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

Exercice 5 (*)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z; \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z; \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right)$. Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques (noyau et image).

Exercice 6 (***)

Soient p et q deux projecteurs dans un même espace vectoriel E, vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.
3. Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. On pose, pour tout entier naturel n, $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \text{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante et la suite (I_k) décroissante (au sens de l'inclusion des ensembles).
2. Montrer qu'il existe un entier p pour lequel $N_p = N_{p+1}$, puis que la suite (N_k) stationne à partir du rang p.
3. Montrer que la suite (I_k) stationne à partir du même rang p.
4. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

Exercice 8 (***)

On se place dans $\mathbb{C}_3[X]$, et on note $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On désigne par f l'application qui, à un polynôme P, associe le reste de la division de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Quelle est la dimension de $\text{Im}(f)$? Montrer que $\text{Im}(f) = (X-1)\mathbb{C}_2[X]$.
4. Déterminer les quatre racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de B.
5. Montrer qu'en posant $P_k = \dfrac{B}{X - z_k}$, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
6. Montrer que $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$.

Exercice 9 (**)

Soit $f \in \mathcal{E}$ un endomorphisme nilpotent, où E est de dimension finie n.

1. Montrer que $\ker(f) \neq \{0\}$, et que $\mathrm{rg}(f) \leqslant n-1$.
2. Soit p le plus petit entier pour lequel $f^p = 0$. Prouver qu'il existe un $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$, et montrer que $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est une famille libre.
3. En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.
4. On suppose que $p = n$. Déterminer toutes les applications linéaires commutant avec f.

Exercice 10 (**)

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par : $\forall P \in E$, $\varphi(P) = 2P - (X-1)P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $\ker(\varphi)$ est une droite vectorielle dont on précisera une base. L'endomorphisme φ est-il injectif ?
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(1, X)$.
4. Montrer que $\ker(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = E$.
5. Soit p la projection vectorielle sur $\ker(\varphi)$ de direction $\mathrm{Im}(\varphi)$. Que valent $\varphi \circ p$ et $p \circ \varphi$?

Exercice 11 (*)

On considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel réel, et on note φ l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $\varphi(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que φ est un projecteur.
3. Déterminer l'image et le noyau de φ, ainsi que leurs dimensions.

Exercice 12 (**)

On pose $E = R[X]$ et, pour tout $P \in E$, $f(P) = P - XP'$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y - xy' = 1$. Possède-t-elle des solutions sur R ?
2. Prouver que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau. L'application f est-elle injective ?
4. L'application f est-elle surjective ?
5. L'application $f \circ f$ est-elle injective ? Surjective ? Déterminer $\ker(f \circ f)$.

Exercice 13 (**)

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2y - 2z, x + y - 2z, x - y) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire (en revenant vraiment à la définition).

2. Déterminer l'image et le noyau de f. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Soit p la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$, donner l'expression de $p(x, y, z)$.
5. Calculer $f^2(x, y, z)$ et $f^3(x, y, z)$, et vérifier que $f^3 - f^2 - 2f = 0$.
6. On pose $r = \dfrac{1}{6}(f^2 + f)$ et $s = \dfrac{1}{3}(f^2 - 2f)$, montrer que r et s sont des projecteurs, et que $f \circ r = 2r$ et $f \circ s = -s$.
7. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $f^n = 2^n r + (-1)^n s$. En déduire l'expression de $f^n(x, y, z)$.

Problème (***)

Dans tout cet exercice, on s'intéresse aux propriétés d'un endomorphisme f sur un espace vectoriel réel E, vérifiant $f \circ f = \dfrac{1}{2}(f + id_E)$. On notera $f \circ f = f^2$ dans tout l'exercice.

I. Une somme directe intéressante.

On note p l'endormorphisme de E défini par $p = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}\,id_E$.

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Vérifier que $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.
3. On note q le projecteur sur $\ker(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$, exprimer q comme combinaison linéaire de f et de p.
4. En déduire que $E = \ker(f - id_E) \oplus \ker\left(f + \dfrac{1}{2}\,id_E\right)$.

II. Expression des puissances de f.

1. Montrer, en utilisant les résultats de la première partie, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = p + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q$.
2. Montrer que f est un automorphisme de E.
3. La relation obtenue pour f^n reste-t-elle valable si $n = -1$? Plus généralement si $n \in \mathbb{Z}$?

III. Un exemple concret.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = \left(-2x + y + z; -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}y + \dfrac{1}{2}z; -3x + y + 2z\right)$.

1. Prouver que $f^2 = \dfrac{1}{2}(f + id_{\mathbb{R}^3})$.
2. Déterminer $\ker(f - id)$ et $\ker\left(f + \dfrac{1}{2}\,id\right)$, et donner une base de chacun de ces deux noyaux.
3. Déterminer l'expression des projecteurs p et q tels que définis dans la première partie.
4. En déduire l'expression de f^n.