Chapitre 14 : Espaces vectoriels

PTSI B Lycée Eiffel

17 mars 2015

Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré
le triangle comme une moitié de carré ou, mieux, d'un parallélogramme :
ils auraient été immédiatement conduits au vecteur,
c'est-à-dire à la structure de l'espace comme espace vectoriel.

MICHEL SERRES

Commment habille-t-on un espace vectoriel ?
Avec une combinaison linéaire !

Introduction

Nous entamons avec ce premier chapître consacré aux espaces vectoriels une partie essentielle de votre programme, consacrée à l'algèbre linéaire. Contrairement à ce que le terme espace vectoriel pourrait vous laisser croire, il sera très peu question de géométrie dans ce chapître (et même dans les deux suivants consacrés à l'algèbre linéaire), un espace vectoriel pouvant très bien contenir, par exemple, des matrices ou des fonctions. L'essentiel est de bien comprendre que tous les ensembles étudiés ici admettent une structure proche, qui permet de définir des objets et de démontrer des propriétés dans un cadre très général, quitte à ensuite les appliquer sur des cas plus précis. Dans ce premier chapître (et dans le suivant), on se concentrera sur l'analogie entre la géométrie analytique dans un repère cartésien (c'est-à-dire en gros tout ce qui fait intervenir des calculs de coordonnées) et le travail qu'on peut effectuer dans des structures plus complexes et beaucoup moins facilement représentables. Ce chapître est généralement considéré par les élèves comme difficile, parce que vous n'avez pas (encore) l'habitude de travailler dans le cadre assez formel de l'algèbre linéaire. Pourtant, les calculs effectués sont en général très simples (en gros uniquement des résolutions de systèmes) et les notions abordées ne font que reproduire ce que vous avez déjà abordé en géométrie dans le plan ou l'espace dans les classes inférieures. L'essentiel dans ce domaine tout neuf pour vous est de bien comprendre les définitions, et d'être très rigoureux dans l'emploi des notations.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser tout le vocabulaire introduit dans ce chapître, et connaître parfaitement les différentes méthodes permettant de faire les calculs classiques (montrer qu'une famille est une base, supplémentaires, dimension).
- savoir résoudre sans la moindre hésitation les petits systèmes linéaires, et exprimer leurs solutions sous forme vectorielle.
- savoir utiliser des arguments de dimension pour simplifier les démonstrations d'algèbre linéaire.

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

1.1 Définitions, exemples

Définition 1. Un ensemble E est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$ s'il est muni d'une addition $\left\{\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}\right.$ et d'un produit extérieur $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x \end{array}\right.$ vérifiant les conditions suivantes :

- La somme est associative et commutative.
- Il existe un élément neutre, noté 0, pour l'addition dans E.
- Tout élément x de E admet un opposé pour l'addition, noté $-x$.
- Le produit est compatible avec le produit de $\mathbb{R}$: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
- L'élémént neutre $1 \in \mathbb{R}$ est un élément neutre pour le produit extérieur : $\forall x \in E$, $1.x = x$.
- Le produit est doublement distributif par rapport à l'addition : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E^2$, $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Remarque 1. Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique, et on peut en fait les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition, et un produit extérieur, qui vérifient des conditions assez naturelles. On peut définir de la même façon des espaces vectoriels complexes en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans la définition.

Définition 2. Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{R}$ par lesquels on peut les multiplier sont appelés **scalaires**.

Exemples :

- L'ensemble des vecteurs du plan (de même que l'ensemble des vecteurs de l'espace), muni de la somme vectoirielle et du produit des vecteurs par les réels, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (encore heureux !).
- L'ensemble des n-uplets de réels $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, muni de la somme terme à terme et du produit par un réel terme à terme est un espace vectoriel réel, noté $\mathbb{R}^n$. On peut identifier l'espace des vecteurs du plan avec $\mathbb{R}^2$ en identifiant un vecteur avec ses coordonnées dans une base du plan.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ (et plus généralement $\mathbb{C}^n$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, mais aussi sur $\mathbb{R}$. La différence entre ces deux structures sur un même ensemble sera notable au niveau de la dimension que nous définirons plus loin.
- L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel réel, la somme de deux suites (u_n) et (v_n) étant la suite $(u_n + v_n)$, et le produit d'une suite (u_n) par un réel λ étant la suite (λu_n). De même, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble de toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel, inclus dans celui de toutes les fonctions. L'ensemble de toutes les fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est aussi un espace vectoriel, inclus dans le précédent.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel (on a prouvé toutes les propriétés de la définition précédente dans le cas des matrices lors de notre chapître consacré au calcul matriciel). Attention toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).
- L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel (mais l'ensemble des polynômes de degré exactement n ne serait pas un espace vectoriel). L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels est aussi un espace vectoriel.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un sous-ensemble F de E est un **sous-espace vectoriel** s'il est lui-même un espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication définies sur E).

Proposition 1. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- $0 \in F$
- $\forall x, y \in F,\ x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda.x \in F$.

Remarque 2. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il est non vide et stable par addition et par multiplication par un réel. La proposition est évidente. On peut d'ailleur remplacer les deux dernières conditions par la suivante : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall(x, y) \in F^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.

Exemples :
- L'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En effet, la somme de deux matrices diagonales est diagonale, et le produit d'une matrice diagonale par un réel est diagonale.
- Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel mais $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !).
- $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ (quelle que soit la valeur de n).
- L'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différente $y'' - 3y' + 2y = 0$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, la somme de deux solutions d'une équation différentielle homogène, ou le produit d'une solution par un réel, est solution de la même équation.

Exercice : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. les suites croissantes.
2. les suites monotones.
3. les suites constantes.
4. les suites ayant une limite finie.
5. les suites géométriques.
6. les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
7. Les suites périodiques.

Corrigé de l'exercice

1. Ce n'est pas un sous-ev, le produit d'une suite croissante (et non constante) par -1 étant rarement une suite croissante.
2. Ce n'est pas un sous-ev non plus, car la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'est pas toujours monotone (en fait, on en est loin, toute suite réelle peut s'écrire comme somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante).
3. C'est un sous-ev.
4. C'est un sous-ev (règles de calcul usuelles sur les limites).
5. Ce n'est pas un sous-ev, la somme de deux suites géométriques n'ayant pas la même raison n'est pas une suite géométrique (mais une suite récurrente linéaire d'ordre 2).
6. Ce n'est pas un sous-ev, pour à peu près la même raison que les suites géométriques : une suite récurrente linéaire d'ordre 2 peut se mettre sous la forme $\alpha r^n + \beta s^n$ (somme de deux suites géométriques) ; si on en additionne deux ayant des racines r et s différentes, on n'a aucune raison d'obtenir une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
7. C'est un sous-ev, si (u_n) est périodique de période p et (v_n) périodique de période q, leur somme sera périodique de période pq (car pq est une période commune à (u_n) et (v_n)). Les autres propriétés sont facilement vérifiées.

2 Familles de vecteurs

2.1 Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 4. Une **famille de vecteurs** dans un espace vectoriel E est un k-uplet $(e_1, \dots, e_k)$ d'éléments de E.

Remarque 3. Attention bien sûr à ne pas confondre une famille de vecteurs de E, et un vecteur qui est souvent lui-même un n-uplet de réels.

Définition 5. Une **combinaison linéaire** d'une famille $(e_1, \dots, e_k)$ de vecteurs de E est un vecteur $x \in E$ qui peut s'écrire sous la forme $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i e_i$, pour un k-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ d'éléments de $\mathbb{R}$.

Exemples : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(2, 5, -3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, -2, 6)$ et $(-1, 11, -21)$, puisque $3(1, -2, 6) + (-1, 11, -21) = (2, 5, -3)$. Par contre, le vecteur $(0, 9, 2)$ n'est pas combinaison linéaire de ces deux même vecteurs (pour déterminer si un vecteur x donné est combinaison linéaire d'une famille, on écrit le système obtenu en obligeant l'égalité $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$).

Dans l'espace vectoriel des matrices à 3 lignes et 3 colonnes $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 8 & 7 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que A^2 est combinaison linéaire de A et de I, puisque $A^2 = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 8 \\ 32 & 25 & -1- \\ 16 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 4A - 3I$.

Définition 6. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est noté $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Définition 7. Une famille $(e_1, \dots, e_k)$ est **génératrice** si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \dots, e_k)$: $\forall x \in E$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Autrement dit, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = E$.

Remarque 4. Pour prouver qu'une famille est génératrice, il faut prouver que l'équation $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, qui peut s'écrire comme un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients λ_i, admet toujours une solution.

Exemples : Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice par définition même de ce qu'est un polynôme : il peut s'écrire sous la forme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$.
Dans $\mathbb{R}^3$, la famille de trois vecteurs $((1, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 1))$ est génératrice. En effet, soit (x, y, z) un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire $(x, y, z) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, -1) + \lambda_3(1, 1, 1)$ si le système $\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \end{array} \right.$ admet une solution. C'est toujours le cas : en soustrayant la troisième équation à la première, $\lambda_2 = x - z$, puis en reportant dans la deuxième équation $\lambda_3 = y - x + z$, et enfin $\lambda_1 = x - \lambda_3 = 2x - y - z$.

Définition 8. Une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_k)$ est **libre** si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (on dit que ses vecteurs sont linéairement indépendants). Autrement dit, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$, alors $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\lambda_i = 0$. Dans le cas contraire, on dit que la famille de vecteurs est **liée**.

Remarque 5. Pour prouver qu'une famille est libre, il faut vérifier que le système linéaire homogène obtenu en écrivant l'égalité $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$ est de Cramer (le système a toujours pour solution la solution nulle, la famille est libre seulement s'il n'y a pas d'autre solution).

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((2,1,0),(1,-1,-1),(0,3,-1))$ est libre car le système $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$ a pour unique solution $(0,0,0)$: en effet, $z = 3y$, $x = y + z = 4y$, donc $2x + y = 5y = 0$, et les trois inconnues sont donc nulles.

Exemple 2 : La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ déjà citée plus haut est également libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 3 : Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille constituée des quatre fonctions $f_1 : x \mapsto e^x$; $f_2 : x \mapsto e^{2x}$; $f_3 : x \mapsto e^{3x}$ et $f_4 : x \mapsto e^{4x}$ constitue une famille libre. Supposons pour le prouver que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$. Si $\lambda_4 \neq 0$, en factorisant l'expression de f par λ_4, on aurait nune limite infinie en $+\infty$, ce qui est incompatible avec le fait que la fonction est censée être toujours nulle. Une fois que $\lambda_4 = 0$, si on suppose ensuite que $\lambda_3 \neq 0$, on aboutira de même à une contradiction, puis on prouvera ensuite $\lambda_2 = 0$ par la même méthode, et on concluera enfin que les quatre coefficients doivent être nuls.

Définition 9. Une famille de vecteurs est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est à la fois libre et génératrice. Autrement dit, tout élément de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de la famille.

Définition 10. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$. Les réels λ_i sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, et les vecteurs $\lambda_i e_i$ **composantes** de x dans cette même base.

2.2 Espace vectoriel engendré par une famille

Proposition 2. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs de E, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant e_1, e_2, ..., e_k (c'est-à-dire que, si F est un sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille, alors nécessairement $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset F$). On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré** par la famille.

Démonstration. Une somme de deux combinaisons linéaires est bien une combinaison linéaire : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) e_i$, et de même pour un produit par un réel : $\rho \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\rho\lambda_i) e_i$, donc $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, un sous-espace contenant les éléments de la famille contient aussi ses combinaisons linéaires puisqu'un sous-espace est stable par combinaisons linéaires, donc il contient forcément $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. □

Exemple : L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(2x + y, 3x - 2y, -x)$, x et y étant deux réels, est un sous-espace vectoriel. Il s'agit en fait du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $(2,3,-1)$ et $(1,-2,0)$, puisque $(2x + y, 3x - 2y, -x) = x(2,3,-1) + y(1,-2,0)$ s'écrit bien comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Exemple très important : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de k équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^n$. On peut d'ailleurs toujours décrire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'un tel système d'équations.

Exemple : L'ensemble F des solutions du système $\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Si on résout le système, on trouve facilement que $F = \{(x, 7x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,7,2) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,7,2))$.

Proposition 3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on définit F comme l'ensemble des solutions de l'équation $x - y + 2z = 0$, et $G = \text{Vect}((1,0,-1),(-2,1,1))$. Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, leur intersection en est donc aussi un. Pour la décrire le plus simplement possible, le mieux est d'écrire les vecteurs de G comme combinaisons linéaires, et de leur faire vérifier l'équation définissant F : $x \in G \Leftrightarrow x = (\lambda - 2\mu, \mu, \mu - \lambda)$, pour un certain couple de réels (λ, μ). Le vecteur x appartient aussi à F si $\lambda - 2\mu - \mu + 2\mu - 2\lambda = 0$, soit $-\lambda - \mu = 0$, donc $\mu = -\lambda$. On a alors $x = (3\lambda, -\lambda, -2\lambda)$, dont on déduit que $F \cap G = \text{Vect}((3,-1,-2))$.

Remarque 6. L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est par contre en général pas du tout un sous-espace vectoriel. Par exemple, l'union de deux droites non confondues dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (ces derniers étant uniquement, outre $\mathbb{R}^2$ tout entier et le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul, les droites passant par l'origine). Ce qui joue en quelque sorte le rôle d'union de sous-espaces vectoriels est la notion que nous allons maintenant définir.

Définition 11. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. La **somme** des espaces F et G, notée tout simplement $F + G$, est l'ensemble $F + G = \{(x + y) \mid x \in F, y \in G\}$.

Proposition 4. La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.

Démonstration. C'est facile : $\lambda(x + y) + \mu(x' + y') = (\lambda x + \mu y) + (\lambda x' + \mu y')$, donc $F + G$ est stable par combinaisons linéaires en supposant que F et G le sont. Par ailleurs, un sous-espace vectoriel contenant F et G contiendra toutes les combinaisons linéaires d'éléments de F et de G, et a fortiori $F + G$. $\square$

Définition 12. Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel E sont **supplémentaires** s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

- $F \cap G = \{0\}$.
- $F + G = E$.

Si F et G sont supplémentaires, on note $F \oplus G = E$.

Remarque 7. Ces deux conditions assurent en fait que tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G (c'est exactement la deuxième condition donnée) et que cette décomposition est unique : en effet, si $x + y = x' + y'$, avec $(x, x') \in F^2$ et $(y, y') \in G^2$, alors $x - x' = y' - y$. Or, $x - x' \in F$ et $y' - y \in G$, ce qui implique en appliquant notre première condition que $x - x' = y - y' = 0$, autrement dit qu'on a écrit deux fois la même décomposition.

Exemple : Dans l'espace, un plan (vectoriel, donc passant par l'origine) et une droite qui n'est pas incluse dans ce plan sont toujours supplémentaires. La notion de supplémentarité signifie en fait que les deux sous-espaces « se complètent bien » pour permettre d'obtenir par combinaisons linéaires l'espace E tout entier. Nous pourrons interpréter plus facilement cette intuition une fois que nous aurons défini la notion de dimension (ici, le plan de dimension 2 est supplémentaire d'une droite de dimension 1 dans l'espace qui est de dimension $3 = 2 + 1$).

Exemple : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques, alors $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

- $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et de même pour $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
  Plus simplement, on peut aussi dire que la condition $A =^t A$ (ou $A = -^t A$ est stable par combinaisons linéaires).
- $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, puisque la seule matrice vérifiant $A =^t A = -A$ est la matrice nulle.
- $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car on peut décomposer une matrice quelconque de la façon suivante : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & c \end{pmatrix}$.

3 Dimension d'un espace vectoriel

3.1 Définitions

Définition 13. Un espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition 5. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre de vecteurs de E, et $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, alors la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{k+1})$ est une famille libre.
Si au contraire la famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est génératrice et $e_{k+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, alors la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est encore génératrice.

Démonstration. Supposons qu'une combinaison linéaire annule la famille : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i = 0$, alors $\lambda_{i+1} e_{i+1} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Le membre de droite appartenant sûrement à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, l'égalité n'est possible que si $\lambda_{k+1} = 0$. Mais alors le membre de droite est nul, ce qui implique par liberté de la famille $(e_1, \dots, e_k)$ que tous les coefficients λ_i sont nuls. La famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est donc bien libre. Prouvons maintenant la deuxième propriété : d'après l'hypothèse, $e_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. La famille étant par ailleurs génératrice, on peut écrire, pour tout vecteur x, que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i + \lambda_i) e_i$ en remplaçant e_{k+1} par sa valeur. La famille $(e_1, \dots, e_k)$ est donc génératrice. $\square$

Théorème 1. Théorème de la base incomplète.
Soient $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_k)$ et $\mathcal{G} = (f_1, \dots, f_p)$ deux familles respectivement libre et génératrice d'un même espace vectoriel E, alors on peut compléter la première famille en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E à l'aide de vecteurs $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ appartenant à la famille $\mathcal{G}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème fondamental est en fait très constructive : on fait la liste des vecteurs de la famille $\mathcal{G}$, un par un, et on essaie de les ajouter à la famille $\mathcal{F}$ (éventuellement déjà un peu augmentée). À chaque vecteur, s'il est dans l'espace vectoriel engendré par la famille dont on dipose au moment de l'ajout, on l'oublie, sinon on l'ajoute à la famille. D'après la proposition précédente, la famille ainsi obtenue sera nécessairement libre puisqu'obtenue en ajoutant à la famille libre $\mathcal{F}$ des vecteurs n'appartenant jamais à l'espace vectoriel engendré par les précédents. Elle est par ailleurs génératrice car obtenue à partir de $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ en supprimant des vecteurs appartenant quand à eux à l'espace engendré par d'autres vecteurs de la famille. C'est donc une base. $\square$

Remarque 8. Ceette démonstration donne un algorithme pratique pour compléter une famille libre de n'importe quel espace usuel en base : on prend les vecteurs de la base canonique et on tente de les ajouter l'un après l'autre à notre famille.

Proposition 6. Lemme de Steinitz. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E et $(f_1, \dots, f_{k+1})$ une autre famille du même espace vectoriel E, alors la famille $(f_1, \dots, f_{k+1})$ est nécessairement liée.

Démonstration. On procède par récurrence sur k. Pour $k = 0$, c'est vrai, la première famille étant vide, elle ne peut engendrer que l'espace vectoriel $E = \{0\}$, donc la deuxième famille contient un vecteur qui est le vecteur nul, et cette famille est liée (oui, le vecteur nul tout seul constitue une famille liée). Supposons la propriété vraie au rang k, et ajoutons un vecteur à chaque famille. La famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ étant supposée génératrice, $f_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_{i,j} e_i$ pour tout entier $j \leqslant k+2$. Si tous les coefficients $\lambda_{k+1,j}$ sont nuls, alors tous les vecteurs de la deuxième famille sont combinaisons linéaires de $(e_1, \dots, e_k)$, on peut appliquer directement l'hypothèse de récurrence pour conclure que $(f_1, \dots, f_{k+1})$ est liée, ce qui ne risque pas de s'améliorer si on ajouter f_{k+2}. Sinon, supposons par exemple, quitte à réordonner les vecteurs de la deuxième famille, que $\lambda_{k+1,k+2} \neq 0$, on pose alors, pour tout entier $i \leqslant k+1$, $g_i = f_i - \dfrac{\lambda_{k+1,i}}{\lambda_{k+1,k+2}} f_{k+2}$, de façon à annuler la coordonnée suivant x_{k+1}. La famille $(g_1, \dots, g_{k+1})$ est alors constituée de vecteurs dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, par hypothèse de récurrence, elle est liée. Cela signifie qu'il y a une relation linéaire du type $\displaystyle\sum_{j=1}^{k+1} \mu_j \left(f_i - \frac{\lambda_{k+1,i}}{\lambda_{k+1,k+2}} f_{k+2} \right) = 0$. Quitte à tout développer, il s'agit d'une relation liant les vecteurs $(f_1, \dots, f_{k+2})$, qui forment donc une famille liée. □

Théorème 2. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, il existe au moins une base finie. Toutes les bases finies ont par ailleurs le même nombre d'éléments, appelé **dimension** de l'espace vectoriel. On la note en général $\dim(E)$.

Démonstration. Par définition, un espace de dimension finie contient une famille génératrice finie. Il contient par ailleurs des familles libres, par exemple la famille vide. Le théorème de la base incomplète assure alors qu'on peut construire une base finie de E. Supposons désormais qu'il existe deux bases de cardinal différent, notons $\mathcal{B}$ celle contenant le moins de vecteurs (on notera n le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$). La famille $\mathcal{B}$ étant génératrice, le lemme de Steinitz assure que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. En particulier, n'importe quelle sous-famille de $n+1$ vecteurs de la base $\mathcal{C}$ est liée, ce qui est absurde pour une base. Toutes les bases ont donc bien le même nombre d'éléments. □

Proposition 7. Dans un espace vectoriel de dimension n :

- Toute famille libre possède au maximum n vecteurs.
- Toute famille génératrice possède au minimum n vecteurs.
- Toute famille libre de n vecteurs est une base.
- Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Démonstration. En effet, une famille libre peut, d'après le théorème de la base incomplète, être complétée en une base de E, qui contiendra nécessairement n vecteurs. il faut donc qu'on soit parti d'une famille de moins de n vecteurs. Par ailleurs, si la famille avait déjà n vecteurs, la complétion sera vite faite, on ne rajoute rien (sinon on aura strictement plus de n vecteurs), la famille était donc déjà une base. De même pour une famille génératrice, on peut trouver une base incluse dans la famille en appliquant le théorème de la base incomplète avec la famille libre vide. La fin du raisonnement est alors complètement symétrique de ce qu'on vient de faire pour une famille libre. □

Exemple : Il suffira désormais de prouver qu'un famille est libre **ou** génératrice pour prouver qu'elle est une base d'un espace vectoriel usuel, ce qui simplifie grandement les démonstrations. En général, on prouve la liberté, ce qui est plus facile. Ainsi, la famille $((1,2);(-3,7))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ et contient deux vecteurs, c'est donc une base.

3.2 Sous-espaces vectoriels et dimension.

Proposition 8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Démonstration. Les familles libres de F étant aussi des familles libres de E, elles ne peuvent pas avoir plus de n élemnts. Prenons une famille libre dans F qui soit de cardinal le plus grand possible. Cette famille est alors forcément génératrice de F, puisque dans le cas contraire, on pourrait trouver un vecteur n'appartenant pas à l'espace engendré par notre famille, et, en l'ajoutant à la famille, créer une famille toujours libre mais contenant plus d'éléments que la famille libre maximale ! L'espace F est donc de dimension finie, et la base qu'on vient d'en construire contient moins de n vecteurs, d'où l'inégalité sur les dimensions. □

Remarque 9. On aura $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$, ce qui permet de simplifier les preuves d'égalité entre espaces vectoriels quand on a des informations sur leurs dimensions (on peut procéder par simple inclusion et non plus par double inclusion).

Théorème 3. Formule de Grassmann.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E, alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. Cette formule nous rappelle diablement celle du cardinal d'une union de deux ensembles. C'est en fait tout à fait logique, puisqu'elle s'identifie exactement à une formule de cardinal d'union si on considère des bases de chacun des espaces vectoriels concernés. Nous allons d'ailleurs la prouver en suivant le même schéma, c'est-à-dire en commençant par le cas particulier où F et G sont supplémentaires. Notons $(f_1, \dots, f_k)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G et prouvons que $(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_p)$ est une base de E (l'égalité des dimensions en découlera immédiatement). Soit $x \in E$, comme F et G sont supplémentaires, on peut décomposer x en $x_F + x_G$ (avec les notations classiques utilisées dans notre précédent chapître sur les espaces vectoriels). Par ailleurs, $x_F = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$, et $x_G = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j$. Le vecteur x s'écrit donc comme combinaison linéaire de la famille $(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_p)$, qui est donc génératrice. Reste à prouver qu'elle est libre, supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j = 0$, on peut écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = -\sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j$. Le membre de gauche est dans F, celui de droite dans G, l'intersection de ces deux sous-espaces est réduite à $\{0\}$ puisqu'ils sont supplémentaires, les deux membres sont donc nuls. Mais les familles $(f_1, \dots, f_k)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ étant libres, cela implique la nullité de tous les coefficients de la combinaison linéaire, et donc la liberté de la famille.
Passons au cas général. Notons F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (de tels supplémentaires existent, il suffit de compléter une base de $F \cap G$ en base de F ou de G et de conserver les vecteurs ajoutés pour en obtenir une base d'après la première partie de la démonstration). On peut certainement affirmer que $\dim(F) = \dim(F') + \dim(F \cap G)$ et $\dim(G) = \dim(G') + \dim(F \cap G)$. Par ailleurs, F' et G sont supplémentaires dans $F + G$. En effet, leur intersection est réduite à $\{0\}$ puisqu'un vecteur de l'intersection appartiendrait à la fois à F' et à $F \cap G$, qui sont supplémentaires dans F, et leur somme est bien égale à $F + G$: un vecteur pouvant s'écrire sous la forme $x_F + x_G$ peut encore se décomposer en $x_{F'} + x_{F\cap G} + x_G$, avec $x_{F\cap G} + x_G \in G$. Toujours en appliquant notre formule dans le cas particulier démontré, $\dim(F+G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. □

Remarque 10. La formule de Grassmann permet encore une fois de réduire considérablement le travail à effectuer, cette fois-ci pour prouver que deux sous-espaces sont supplémentaires. Il suffit en effet de prouver, au choix :

- que $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
- que $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Exemple : Si on reprend l'exemple traité précédemment des matrices symétriques et antisymétriques dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, une fois obtenues les dimensions 6 et 3 respectives des deux sous-espaces, prouver que leur intersection est nulle suffit (et c'est facile). Plus généralement, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices symétriques forment un sous-espace de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, les antisymétriques un sous-espace de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$, et ils sont toujours supplémentaires (la somme des dimensions vaut bien n^2, et seule la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique).

Définition 14. Dans un espace vectoriel de dimension n, un **hyperplan** est un sous-espace de dimension $n - 1$.

4 Espaces vectoriels classiques

Proposition 9. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, et la famille de vecteurs $((1,0,0,\dots,0);(0,1,0,\dots,0);\dots$ $(0,\dots,0,1,0,\dots,0);\dots;(0,0,\dots,0,1))$ en est une base, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Donnons un nom aux vecteurs de la base : $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, où le 1 est situé en i-ème position. Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc la famille est génératrice. Elle est clairement libre, puisque l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ est équivalente à la condition $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Il s'agit donc bien d'une base. C'est la base qu'on utilise habituellement pour les calculs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. □

Remarque 11. L'espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$, mais de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, la famille $(1, i)$ en formant assez facilement une base. Plus généralement, $\mathbb{C}^n$ est de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 10. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension np, et la famille constituée des matrices $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$), où $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en constitue une base appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. La famille $(E_{i,j})$ est bien génératrice puisque, si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $M = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} m_{i,j} E_{i,j}$. Supposons maintenant qu'une combinaison linéaire des matrices de la famille soit nulle : $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. La somme de gauche étant simplement la matrice dont le coefficient d'indice i, j vaut $\lambda_{i,j}$, elle est nulle seulement si tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, la famille est donc bien libre. □

Remarque 12. Les coordonnées d'une matrice dans cette base canonique sont simplement ses coefficients, lus de gauche à droite et de haut en bas. Remarquons que, comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$, la base a été obtenue en mettant successivement des 1 à tous les endroits possibles, et en remplissant avec des 0. C'est un principe que nous allons retrouver dans notre troisième exemple d'espace vectoriel classique.

Proposition 11. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$, et la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ en constitue une base appelée **base canonique**.

Démonstration. La famille est génératrice par définition de ce qu'est l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est libre, car si on suppose que $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i = 0$, on est face à un polynôme admettant une bonne infinité de racines, ce qui n'est possible que pour le polynôme nul (du moins sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$). □

Remarque 13. Les coordonnées d'un polynôme dans la base canonique sont simplement ses coefficients, donnés par ordre de puissances croissantes.

Définition 15. Une famille **échelonnée** de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ est une famille constituée de $n+1$ polynômes de degrés respectifs 0, 1, 2, ..., n.

Proposition 12. Toute famille échelonnée de polynômes est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur l'entier n. Si $n = 0$, une famille échelonnée de polynômes est réduite à un seul polynôme constant non nul (puisque de degré 0 et pas $-\infty$), qui constitue bien une base de $\mathbb{R}_0[X]$. Supposons la propriété vérifiée au rang n, et considérons une famille de polynômes échelonnée $(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$. Par hypothèse de récurrence, $(P_0, \dots, P_n)$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Prouvons que notre famille est génératrice : soit $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on peut écrire $Q = a_{n+1}X^{n+1} + Q_1$, avec $d^\circ(Q_1) \leqslant n$. De même, $P_{n+1} = b_{n+1}X^{n+1} + R$, avec $d^\circ(R) \leqslant n$ et $b_{n+1} \neq 0$ puisque P_{n+1} est supposé de degré $n+1$. On peut alors écrire $Q = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} P_{n+1} - \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} R + Q_1$. Comme $Q_1 - \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} R$ est par construction un polynôme de degré inférieur ou égal à n, on peut l'écrire comme combinaison linéaire de P_0, P_1, ..., P_n, donc Q est une combinaison linéaire de notre famille. Prouvons désormais que notre famille est libre : si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P_i = 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i + \lambda_{n+1} R = -\lambda_{n+1} b_{n+1} X^{n+1}$. Comme le membre de gauche est de degré au plus n, cela n'est possible que si $\lambda_{n+1} = 0$. Mais alors on a une combinaison linéaire annulant la famille $(P_0, \dots, P_n)$ qui est libre, tous ses coefficients sont nécessairement nuls. Notre famille est donc libre en plus d'être génératrice, c'est une base. □

Proposition 13. L'ensemble S des suites vérifiant la récurrence linéaire $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles. Dans le cas où son équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, les deux suites géométriques $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ définies par $u_n = r_1^n$ et $v_n = r_2^n$ forment une base de S. Si l'équation caractéristique a une solution double r, les suites définies par $u_n = r^n$ et $v_n = nr^n$ forment une base de S. Si l'équation admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = re^{-i\theta}$, les suite définies par $u_n = r^n \cos(n\theta)$ et $v_n = r^n \cos(n\theta)$ forment une base de S.

Remarque 14. Cette proposition n'est pas une nouveauté, c'est exactement la même que celle que nous avons déjà vue sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, exprimée un peu différemment.

Démonstration. L'ensemble S est clairement un sous-espace vectoriel : la somme de deux suites vérifiant la récurrence la vérifie aussi (il suffit d'additionner les équations), de même pour le produit par un réel.
Notons à présent x la suite vérifiant $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ et qui appartient à S (donc qui vérifie la récurrence pour $n \geqslant 2$) et y la suite de S vérifiant $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$. La famille (x, y) est libre (en effet, les deux suites ne sont pas proportionnelles), mais également génératrice de S. En effet, soit z un élément de S, $a = z_0$ et $b = z_1$, on a en fait $z = ax + by$: cela est vrai pour les deux premiers termes de la suite, et ensuite cela le reste par récurrence double. On en déduit que (x, y) est une base de S, qui est donc de dimension 2.
Plaçons-nous dans le cas de deux racines distinctes : on a déjà prouvé dans le chapître sur les suites que les suites (u_n) et (v_n) étaient dans S. De plus, elles forment une famille libre (elles ont le même premier terme, mais pas le même deuxième terme), et donc une base puisqu'elle est constituée de deux suites dans un espace vectoriel de dimension 2. C'est exactement ce qu'on voulait prouver. Les autres cas sont très similaires. □