Chapitre 10 : Continuité

PTSI B Lycée Eiffel

23 janvier 2015

Un prof de maths explique à une blonde comment montrer que $\lim_{x \to 8} \frac{1}{x-8} = \infty$.
La blonde assure avoir parfaitement compris.
Pour vérifier, le prof lui demande ce que vaut $\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5}$.
Et la blonde répond, très fière d'elle : $\lim_{x \to 5} \frac{1}{x-5} = \rotatebox{90}{5}$.

Une fois qu'on a passé les bornes, il n'y a plus de limite.

Alphonse Allais.

Introduction

Pour terminer le premier semestre, nous allons revenir en détail sur les outils élémentaires d'études de fonctions, en définissant rigoureusement les notions et en effectuant le plus possible de démonstrations. Pour les limites, ce sera très simple si vous avez bien assimilé le chapître correspondant sur les suites. Quant à la continuité, ce n'est finalement qu'une question de limite (notion locale) qu'on étend sur un intervalle (notion globale). Elle mène toutefois à quelques théorèmes d'analyse fondamentaux que nous aborderons en fin de chapître, donc le fameux théorème des valeurs intermédiaires que vous connaissez déjà bien mais que vous appliquez en général fort mal.

Objectifs du chapitre :

- savoir calculer des limites efficacement.
- comprendre la différence entre théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection, et reconnaître les situations permettant d'utiliser chacun d'eux.

1 Limites

1.1 Limites en $\pm\infty$

Définition 1. Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ **admet pour limite** $l \in \mathbb{R}$ **en** $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \geqslant x_0$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. On définit de même une limite finie quand x tend vers $-\infty$ en reamplaçant simplement la condition $\forall x \geqslant x_0$ par $\forall x \leqslant x_0$ (et on suppose f définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; a]$). On le note respectivement $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Remarque 1. Cette définition étant strictement identique à celle qu'on a vue dans le cadre des suites, nous allons rapidement passer à la suivante. Notons qu'elle est même plus facile à manier que dans le cas des suites puisqu'on n'a pas besoin de s'embêter à prendre des parties entières pour la valeur de x_0 si on veut l'appliquer à un calcul de limite pratique.

Définition 2. Une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ **admet pour limite** $+\infty$ **(respectivement** $-\infty$**) en** $+\infty$ si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant M$ (resp. $f(x) \leqslant M$). On le note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (restp. $-\infty$), et on définit bien sûr de façon similaire des limites infinies en $-\infty$.

Là encore, rien de nouveau sous le soleil.

1.2 Limites en a

Définition 3. Une fonction f définie sur un intervalle contenant le réel a **admet pour limite** $l \in \mathbb{R}$ **quand** x **tend vers** a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Remarque 2. Cette définition est au fond assez naturelle : on est aussi proche que souhaité de l quitte à se mettre suffisamment près de a au départ.

Exemple : Montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$. Fixons donc (comme on le faisait pour les suites) un $\varepsilon > 0$, on souhaite vérifier la condition $|x^2 - 1| < \varepsilon$, soit $|x-1| \times |x+1| < \varepsilon$. Quitte à imposer $\eta \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on chercher simplement une valeur convenable de toute façon), $\dfrac{1}{2} \leqslant |x+1| \leqslant \dfrac{3}{2}$, donc il faut avoir $|x+1| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3}$. La constante $\eta = \min\left(\dfrac{2\varepsilon}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$ convient donc.

Définition 4. Une fonction f définie sur un intervalle contenant le réel a **admet pour limite** $+\infty$ **(resp.** $-\infty$**) quand** x **tend vers** a si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0$, $|x-a| < \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M$ (resp. $f(x) \leqslant M$). On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Proposition 1. La limite d'une fonction f (que ce soit en a ou en $\pm\infty$), lorsqu'elle existe, est unique.

Démonstration. C'est exactement la même preuve que dans le cas des suites. $\square$

Définition 5. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, un **voisinage** de a est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a (ou dans le cas où a est infini, un intervalle de la forme $]b;+\infty[$ ou $]-\infty;c[$).

Remarque 3. La notion de voisinage, même si elle peut paraître extrêmement rudimentaire, permet d'unifier toutes les différentes définitions de la limite qu'on a données depuis le début du chapître. En effet, que a et l soient finis ou infinis, on pourra toujours traduire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ de la façon suivante : pour tout voisinage V de l, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$ (je vous laisse vérifier). Elle permet aussi de donner des démonstrations simples et élégantes de la plupart des propriétés élémentaires sur les limites. On évitera toutefois un recours trop systématique à cette notion qui est à la frontière du programme.

Proposition 2. Une fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a.

Démonstration. Comme dans le cas des suites, il suffit de prendre par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition pour trouver un intervalle sur lequel f est bornée. $\square$

Définition 6. La fonction f admet pour limite **à gauche** quand x tend vers a un nombre l (éventuellement infini) si on remplace dans la définition de la limite la condition $|x-a| < \eta$ par la condition $x \in]a-\eta; a[$. On définit de même une notion de limite **à droite** en remplaçant la condition par $x \in]a; a+\eta[$. On le note respectivement $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$.

Remarque 4. Clairement, f admet pour limite l en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$.

Exemple : La fonction partie entière admet en chaque entier naturel des limites à gauche et à droite qui sont distinctes. Ainsi, $\lim_{x\to 2^+} Ent(x) = 2$, mais $\lim_{x\to 2^-} Ent(x) = 1$.

Théorème 1. Toutes les propriétés vues dans le chapître sur les suites concernant les opérations et les limites, ainsi que les inégalités et les limites, restent valables sur les fonctions, que ce soit en $\pm\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$. Nous ne reviendrons pas dessus, pas plus que nous ne referons de démonstrations concernant les limites de fonctions usuelles vues en début d'année.

Proposition 3. Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = l$, alors $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = l$ (tous les réels ayant le droit d'être infinis).

Remarque 5. Ce résultat reste vrai quand on compose une fonction et une suite : si $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Démonstration. C'est la seule démonstration que je ferai à l'aide de voisinages pour ne pas avoir à distinguer plein de cas. Soit donc V un voisinage de l. Puisque $\lim_{x\to b} g(x) = l$, il existe un voisinage W de b tel que $g(W) \subset V$. De même, il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset W$. On en déduit que $g \circ f(U) \subset g(W) \subset V$, donc on a trouvé un voisinage convenable de a, et $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = l$. □

Proposition 4. Caractérisation séquentielle de la limite.
Une fonction f admet pour limite l quand x tend vers a si et seulement si, pour toute suite (u_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Démonstration. Le sens réciproque est évident, c'est la composition d'une limite de suite et de fonction qu'on vient de voir. Pour l'autre sens, on va en fait démontrer la réciproque : supposons que f n'admet pas pour limite l lorsque x tend vers a. Pour simplifier, on prendra des valeurs finies pour a et l même si la caractérisation reste vraie avec des limites infinies. Si on prend la négation de la définition de la limite, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists x \in]a-\eta; a+\eta[$, $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. Fixons donc un tel ε, et prenons comme valeurs de η les nombres $\frac{1}{n}$. Il existe donc, quel que soit l'entier n, (au moins) un réel que l'on va noter x_n dans l'intervalle $\left]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}\right[$, pour lequel $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. Par construction, la suite (x_n) converge vers a (puisque $a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$, c'est une application du théorème des gendarmes), et pourtant $f(x_n)$ ne peut pas converger vers l puisque cette suite est toujours à une distance de l plus grande qu'un $\varepsilon > 0$ fixé. Ceci démontre la contraposée du sens direct du théorème, et donc le théorème lui-même. □

Remarque 6. Cette caractérisation peut surtout être utile pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite à un endroit donné. Pour celà, il suffit en effet de trouver par exemple deux suites convergeant vers la valeur en question, mais pour lesquelles les images par f n'ont pas la même limite. Prenons par exemple $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, dont on veur étudier le comportement en 0. Posons d'abord $u_n = \frac{1}{2n\pi}$, la suite (u_n) converge vers 0 et $f(u_n) = \cos(2n\pi) = 1$ est une suite constante convergeant vers 1. Considérons désormais $v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, la suite (v_n) tend également vers 0, mais cette fois-ci $f(v_n) = -1$. La fonction f ne peut donc pas admettre de limite en 0.

Théorème 2. Théorème de la limite monotone.
Toute fonction monotone définie sur un intervalle I admet en tout point de I une limite à gauche (sauf pour la borne inférieure de I, et en tout point de I une limite à droite (sauf pour la borne supérieure de I). Ces limites peuvent être infinies. Si on note $I =]a; b[$, dans le cas où la fonction est croissante, on aura toujours $\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup_{x\in]a;c[} f$, et $\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf_{x\in]c;b[} f$ (si f est décroissante, on inverse le rôle des bornes inférieure et supérieure).

Démonstration. Théorème admis, comme dans le cas des suites. □

2 Continuité

2.1 Définitions

Définition 7. Une fonction f définie sur un intervalle I est **continue en** $a \in I$ si $\lim\limits_{x \in a} f(x) = f(a)$. La fonction f est **continue à gauche** en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, et **continue à droite** en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Elle est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple : La fonction partie entière (notre exemple préféré quand il s'agit de continuité) est continue à droite en tout réel, mais elle n'est pas continue à gauche en x (et donc pas continue du tout) lorsque $x \in \mathbb{Z}$.

Définition 8. Une fonction f est **continue sur un intervalle** I si elle est continue en tout point de I.

Théorème 3. Tous les résultats classiques sur les opérations et les limites permettent de prouver facilement qu'une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions continues est une fonction continue. Par ailleurs, toutes les fonctions usuelles (sauf la partie entière) sont continues sur tous les intervalles où elles sont définies. ces résultats seront souvent désignés par le terme générique de théorèmes généraux, et utilisés sans rentrer dans le détail dans les exercices (on se concentrera sur les études de continuité aux endroits où il y a vraiment un calcul à faire ou une réflexion à mener).

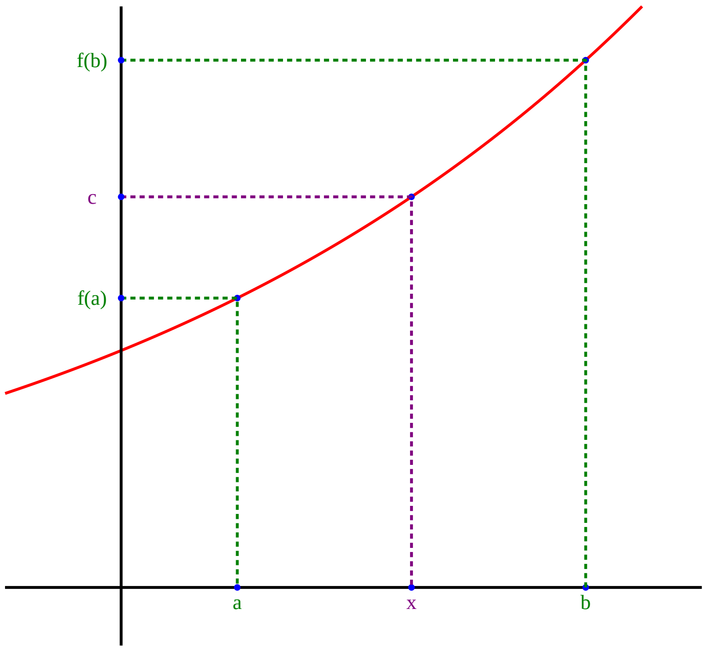
Proposition 5. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ admettant une limite finie l quand x tend vers a, alors on peut prolonger f de manière unique en une fonction continue sur I en posant $f(a) = l$ (on garde habituellement la même notation pour la fonction prolongée, même si c'est un abus de notation). On parle de **prolongement par continuité** de f en a.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ mais prolongeable par continuité à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$, puisque $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$ (croissance comparée).

3 Propriétés globales

Cette dernière partie sera simplement consacrée à un alignement de gros théorèmes fondamentaux pour la compréhension de la notion de continuité, à commencer par le plus célèbre d'entre eux :

Théorème 4. Théorème des valeurs intermédiaires.
Soit f une fonction continue sur le segment $[a; b]$ et c un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe un réel $x \in [a; b]$ tel que $f(x) = c$.



Remarque 7. Quoi que veuillent bien en dire des générations d'élèves, le théorème des valeurs intermédiaires ne garantit pas le moins du monde l'unicité du réel x, c'est un simple théorème d'existence. Si on doit prouver qu'une équation du type $f(x) = c$ admet une solution unique sur un intervalle, ce n'est donc pas lui qu'il faut invoquer, mais son cousin le théorème de la bijection (que nous allons revoir plus bas).

Démonstration. Encore un théorème admis, car il utilise de façon assez fine la notion de borne supérieure. □

Corollaire 1. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

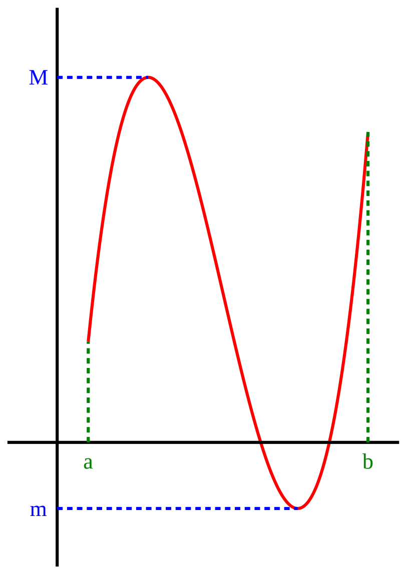
Exemple : Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$, alors f admet forcément un point fixe. En effet, si on pose $fg(x) = f(x) - x$, la fonction g est certainement continue, $g(0) = f(0) \geqslant 0$, et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puisque $f(1) \leqslant 1$. Le réel 0 est donc compris entre $g(0)$ et $g(1)$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour affirmer l'existence d'un réel x tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$. Ce résultat garantit l'existence d'un point fixe sur tout intervalle stable (les valeurs 0 et 1 sont accessoires) d'une fonction continue.

Démonstration. En effet, un intervalle est simplement un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient tous les réels contenus entre deux de ses éléments. Le théorème des valeurs intermédiaires assure exactement celà pour l'image d'un intervalle par une fonction continue. □

Remarque 8. La nature (ouvert, fermé, borné) de l'intervalle image n'est pas toujours la même que celle de l'intervalle de départ. Par exemple, si $f(x) = x^2$, $f([-2;1[) = [0;4]$. Si f est la fonction inverse, $f([1;+\infty[) =]0;1]$.

Remarque 9. Rappelons que le théorème des valeurs intermédiaires est un outil fondamental pour la mise en place de la méthode de dichotomie vue dans le chapître sur les suites.

Théorème 5. Théorème du maximum.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Remarque 10. Autrement dit, une fonction continue sur un segment atteint son minimum et son maximum. Ce résultat ressemble énormément au précédent, et pourtant il est plus profond, et ne se démontre pas uniquement à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. D'ailleurs, je ne donne une partie de la démonstration qu'à titre indicatif, puisqu'elle est hors-programme, faisant intervenir le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Démonstration. Soit donc une fonction f définie et continue sur un segment $[a;b]$. Commençons par prouver que f est bornée sur $[a;b]$. Supposons par l'absurde qu'elle n'est par exemple pas majorée. Il existe alors, pour tout entier naturel n, un réel x_n dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(x_n) \geqslant n$. La suite (x_n) étant bornée, elle admet, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, une sous-suite y_n convergeant vers un réel c. Par continuité de f, on devrait donc avoir $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = f(c)$. Or, $f(x_n) \geqslant n$ implique $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$, et de même pour la sous-suite $(f(y_n))$. C'est contradictoire, la fonction est donc nécessairement majorée. Elle est minorée pour les mêmes raisons, et le fait qu'elle atteint ses bornes nécessite une fois de plus de la manipulation de bornes supérieures que je ne ferai pas ici. $\square$

Théorème 6. Théorème de la bijection.
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I vers $J = f(I)$ et sa réciproque g est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur J.

Démonstration. Supposons f croissante (l'autre cas est très similaire). On sait déjà que $f(I)$ est un intervalle, et de plus f est injective car strictement monotone, donc bijective sur son image. La fonction g est donc bien définie sur J. De plus, si y et y' sont deux éléments de J tels que $y < y'$, on a $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, avec $x < x'$, donc $g(y) = x < x' = g(y')$ et g est strictement croissante. Enfin, soit $y \in J$, $x = g(y)$ et $\varepsilon > 0$ (et tel que $[x-\varepsilon; x+\varepsilon] \subset I$, sinon il n'y a pas de problème). Notons $y_1 = g(x-\varepsilon)$, $y_2 = f(x+\varepsilon)$. Posons $\eta = \min(y-y_1; y_2-y)$. On a alors $[y-\eta; y+\eta] \subset [y_1; y_2]$, donc par croissance de g, $g([y-\eta; y+\eta]) \subset [x-\varepsilon; x+\varepsilon]$. Ceci prouve la continuité de g en y. $\square$

3.1 Suites implicites

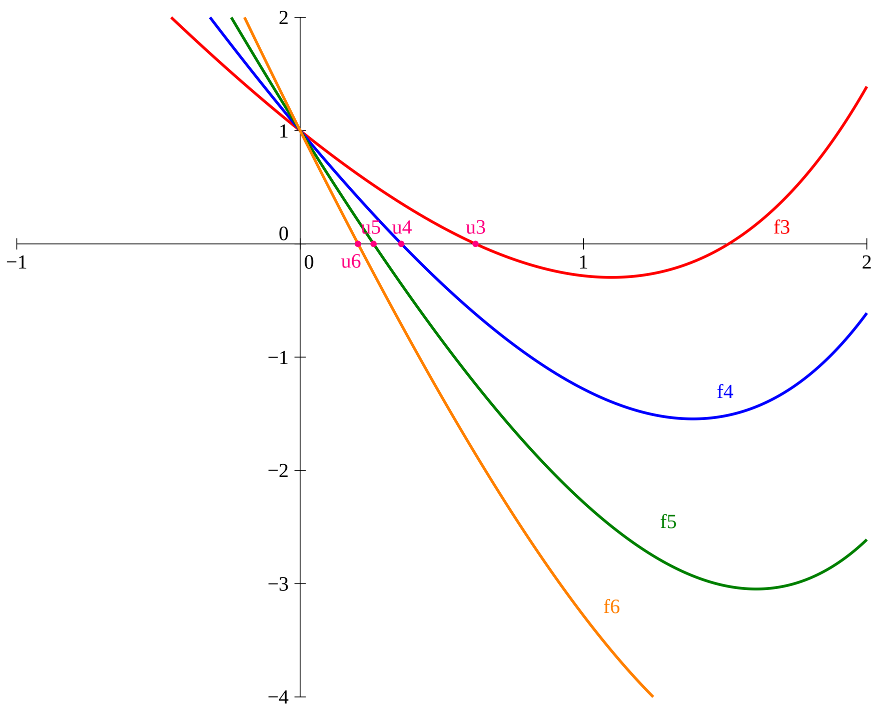
Dans ce paragraphe, on se contentera d'énoncer quelques grands principe généraux, et de les appliquer sur un exemple concret. Les suites implicites auxquelles nous allons nous intéresser sont définies par des équations de la forme $f_n(u_n) = 0$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues. C'est le cas que vous croiserez le plus fréquemment dans les exercices.

Exemple : On définit la suite (u_n) de la façon suivante : $\forall n \geqslant 3$, u_n est la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. Cette définition est correcte car la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n'(x) = e^x - n$, donc admet un minimum global en $\ln n$, de valeur $e^{\ln n} - n\ln n = n(1 - \ln n) < 0$ pour $n \geqslant 3$. L'équation admet donc une solution $u_n \leqslant \ln n$ (et accessoirement une deuxième solution supérieure à $\ln n$).

Pour prouver par exemple que $\forall n \geqslant 3$, $u_n > 0$, on constate que $f_n(0) = e^0 - n \times 0 = 1 > 0$. Or, par définition, $f_n(u_n) = 0 < f_n(0)$. En utilisant le théorème de la bijection (et en fait la partie de la conclusion qui stipule que f_n^{-1}, qui est définie sur $[n(1 - \ln n); +\infty[$, à valeurs dans $]-\infty; \ln n]$, est de même monotonie que f_n), on peut en déduire que $u_n > 0$.

On peut prouver de même que la suite (u_n) est décroissante : $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n = e^{u_n} - nu_n - u_n = -u_n < 0$ (on a utilisé le fait que $f_n(u_n) = 0$, et que $u_n > 0$). On a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, d'où $u_n > u_{n+1}$ (c'est encore la décroissance de la réciproque qui est utilisée).

La suite étant décroissante minorée, elle converge vers un certain réel l. Pour déterminer la valeur de l, il faut revenir à l'équation permettant de définir la suite : puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{u_n} = e^l$. Or, par définition, $e^{u_n} = nu_n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = e^l$. Ceci n'est possible que si $l = 0$ (sinon, nu_n tendrait vers $+\infty$), et on en déduit au passage que $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$.



On peut conclure en faisant une liste de méthodes à connaître pour l'étude de ce type de suites. On débutera de toute façon toujours par l'étude des variations des fonctions f_n.

- Pour majorer ou minorer une telle suite par un réel M, on se contente de calculer $f_n(M)$ et d'utiliser le tableau de variations de la fonction.
- Pour étudier la monotonie de la suite, on tentera d'exprimer $f_{n+1}(u_n)$ (ou $f_n(u_{n+1})$) sous une forme simple, pour le comparer à $f_{n+1}(u_{n+1})$ (qui est nul par hypothèse). Là encore, les variations de f_n permettront de conclure.
- Pour déterminer la limite éventuelle de la suite, on tentera de passer à la limite dans la relation $f_n(u_n) = 0$.