# TD n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 avril 2015

## Exercice 1

1. Deux choses à vérifier : $\varphi$ est linéaire puisque $\varphi(\lambda P+Q) = (X^2+1)(\lambda P(1)+Q(1))+\lambda P+Q = \lambda(X^2+1)P(1)+\lambda P+(X^2+1)Q(1)+Q = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$. De plus, $\varphi(P)$ est toujours un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 puisqu'il est somme de $(X^2+1)P(1)$, qui est de degré 2 au plus (et même de degré 2 exactement, sauf si $P(1)=0$), et de $P$ qui est de degré inférieur ou égal à 2. L'application $\varphi$ est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3, est la famille $(1, X, X^2)$. Calculons donc $\varphi(1) = (X^2+1)\times 1+1 = X^2+2$, puis $\varphi(X) = (X^2+1)\times 1+X = X^2+X+1$ ; et enfin $\varphi(X^2) = (X^2+1)\times 1+X^2 = 2X^2+1$. On peut donc affirmer que $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^2+2, X^2+X+1, 2X^2+1)$. Reste à déterminer si la famille génératrice obtenue pour l'image est libre, ce qui n'est pas évident. Supposons donc que $a(X^2+2)+b(X^2+X+1)+c(2X^2+1) = 0$, soit $(a+b+2c)X^2+bX+2a+b+c = 0$. Un polynôme étant nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on obtient immédiatement $b=0$, puis $a+2c = 2a+c = 0$, ce qui n'est possible que si $a=c=0$. La famille est donc bel et bien libre, ce qui prouve que $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$, donc que $\varphi$ est surjective puisqu'on a alors nécessairement $\mathrm{im}(\varphi) = \mathbb{R}_2[X]$. Étant un endomorphisme dans un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi$ est alors injectif, et bijectif.
3. Calculons donc $\varphi^2(P) = \varphi((X^2+1)P(1)+P) = (X^2+1)(2P(1)+P(1))+(X^2+1)P(1)+P = 4(X^2+1)P(1)+P$. On en déduit que $\varphi^2(P)-4\varphi(P)+3P = 4(X^2+1)P(1)+P-4(X^2+1)P(1)-4P+3P = 0$. Bon, ben ça marche. On pouvait aussi poser plus brutalement $P = aX^2+bX+c$ et tout exprimer en fonction de $a$, $b$ et $c$.
4. En reprenant l'égalité démontrée à la question précédente et en arrangeant un peu, on a $3\,\mathrm{id} = \varphi\circ(4\,\mathrm{id}-\varphi)$, ce qui suffit à prouver que $\varphi^{-1} = \dfrac{4}{3}\,\mathrm{id}-\dfrac{1}{3}\varphi$. On a donc $\varphi^{-1}(P) = \dfrac{4}{3}P-\dfrac{1}{3}\varphi(P) = P-\dfrac{1}{3}(X^2+1)P(1)$.
5. Il est temps d'expliciter $\varphi(P)$ en partant de $P = aX^2+bX+c$ : $P(1) = a+b+c$, donc $\varphi(P) = (a+b+c)(X^2+1)+aX^2+bX+c = (2a+b+c)X^2+bX+a+b+2c$. Le polynôme $P$ appartient à $\ker(\varphi-\mathrm{id})$ si $\varphi(P) = P$, soit $(2a+b+c)X^2+bX+a+b+2c = aX^2+bX+c$. Par identification, on obtient l'unique équation $a+b+c = 0$ (la deuxième équation est toujours vérifiée, et la troisième est la même que la première), soit $\ker(\varphi-\mathrm{id}) = \{aX^2+bX-(a+b) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(X^2-1, X-1)$. Les plus malins avaient remarqué dès le départ que $P\in\ker(\varphi) \Leftrightarrow P(1) = 0$, ce qui rend le résultat obtenu à peu près évident. Pour $\ker(\varphi-3\,\mathrm{id})$, on utilise la même méthode : $(2a+b+c)X^2+bX+a+b+2c = 3aX^2+3bX+3c$. L'identification du coefficient médian donne immédiatement $b=0$, et ensuite on a $-a+c = a-c = 0$, soit $a=c$. Autrement dit, $\ker(\varphi-3\,\mathrm{id}) = \{aX^2+a \mid a\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^2+1)$.
6. La famille étant constituée de trois polynômes, il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Mais comme on nous demande ensuite les coordonnées de $P = aX^2+bX+c$ dans cette base, prouvons plutôt qu'elle est génératrice en cherchant à écrire $aX^2+bX+c = \lambda(X^2-1)+\mu(X-1)+\nu(X^2+1) = (\lambda+\nu)X^2+\mu X+(\nu-\lambda-\mu)$. L'identification donne immédiatement $\mu = b$, puis $\lambda+\nu = a$ et $\nu-\lambda-\mu = c$. Allez, on peut faire une substitution

ici : $\lambda = a - \nu$, donc $2\nu - \mu - a = c$, soit $\nu = \dfrac{a+b+c}{2}$, puis $\lambda = \dfrac{a-b-c}{2}$. La famille est donc génératrice, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et les coordonnées de $P$ dans cette base sont $\left(\dfrac{a-b-c}{2}, b, \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

7. Le calcul de la question précédente permet immédiatement d'obtenir que $p(P) = \dfrac{a-b-c}{2}(X^2 - 1) + b(X-1)$, et $q(P) = \dfrac{a+b+c}{2}(X^2+1)$, donc $p(P) + 3q(P) = \dfrac{a-b-c}{2}X^2 + bX + \dfrac{-a-b+c}{2} + \dfrac{3a+3b+3c}{2}X^2 + \dfrac{3a+3b+3c}{2} = (2a+b+c)X^2 + bX + (a+b+2c)$, ce qui coïncide exactement avec la formule de $\varphi(P)$.

## Exercice 2

1. Les applications qui à une matrice associent l'un de ses coefficients sont linéaires par définition de la somme matricielle et du produit d'une matrice par un réel (qui se font terme à terme). La trace est la somme de deux telles applications, elle donc aussi linéaire, et étant à valeurs dans $\mathbb{R}$, est une forme linéaire.
2. Le noyau de la trace, qui est une forme linéaire non nulle, est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc de dimension $4-1=3$. Le noyau est simplement défini par l'équation $d = -a$, donc $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
3. Calculons donc $f(\lambda A + D) = \mathrm{Tr}(\lambda A + D)B + C(\lambda A + D) = \lambda \,\mathrm{Tr}(A)B + \mathrm{Tr}(D)B + \lambda CA + CD = \lambda f(A) + f(D)$ en utilisant simplement la linarité de la trace.
4. Calculons donc $f(B) = B + CB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ; puis $f(C) = 2B + C^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (non, ces calculs n'ont absolument aucun intérêt).
5. Pour plus de légèreté dans la présentation, on assimilera les matrices aux quadruplets de vecteurs $(a,b,c,d)$, et on notera donc $f(a,b,c,d) = (2a+2d, 0, a+d, -a-d) + (a-c, b-d, -a+c, -b+d) = (3a+2d-c, b-d, c+d, -a-b)$. Le noyau de $f$ est donc obtenue en résolvant le système $3a + 2d - c = b - d = c + d = -a - b = 0$. Les trois dernières équations donnent rapidement $d = b$ ; $c = -d = -b$ et $a = -b$. En reportant dans la première, on trouve alors $-3b + 2b + b = 0$, ce qui est toujours vrai. On en déduit que $\ker(f) = \{(-b, b, -b, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$, ou plus matriciellement $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$. Pour l'image, on peut calculer les images des quatre matrices de la base canonique, ce qui donne (toujours présenté sous forme de quadruplets de réels) : $(3,0,0,-1)$ ; $(0,1,0,-1)$ ; $(-1,0,1,0)$ et $(2,-1,1,0)$. On sait déjà en appliquant le théorème du rang que la dimension de l'image doit être égale à 3, et on vérifie en effet que le quatrième vecteur est combinaison linéaire des trois autres : $(3,0,0,-1) - (0,1,0,-1) + (-1,0,1,0) = (2,-1,1,0)$. On en déduit que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
6. Puisque la somme de leurs dimensions est égale à 4, il suffit au choix de prouver que leur intersection est nulle, ou que leur somme est $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tout entier. On va plutôt prendre la deuxième option car on a lu l'énoncé de la question suivante. Essayons donc d'écrire $(a,b,c,d) = x(-1,1,-1,1) + y(3,0,0,-1) + z(0,1,0,-1) + t(-1,0,1,0)$. On va procéder par substitution ; la deuxième coordonnée donne $x + z = b$, soit $z = b - x$, la troisième donne $-x + t = c$, soit $t = c + x$. La dernière donne ensuite $x - y - z = d$, soit $y = x - z - d = 2x - b - d$, et enfin la première devient $-x + 3y - t = a$, soit $-x + 6x - 3b - 3d - c - x = a$, donc

$4x = a+3b+c+3d$, et $x = \dfrac{a+3b+c+3d}{4}$. Ensuite, $y = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ ; $z = \dfrac{-a+b-c-3d}{4}$ et $t = \dfrac{a+3b+5c+3d}{4}$. La famille est bien génératrice, c'est une base.

7. On l'a déjà fait à la question précédente, les coordonnées sont $\left(\dfrac{a+3b+c+3d}{4}; \dfrac{a+b+c+d}{2}; \dfrac{-a+b-c-3d}{4}; \dfrac{a+3b+5c+3d}{4}\right)$.
8. Écrivons pour commencer les calculs dans $\mathbb{R}^4$ : en reprenant les notations précédentes, $s(a,b,c,d) = x(-1,1,-1,1) - y(3,0,0,-1) - z(0,1,0,-1) - t(-1,0,1,0) = (-x-3y+t, x-z, -x-t, x+y+z) = \left(\dfrac{-3a-3b-c-3d}{2}; \dfrac{a+b+c+3d}{2}; \dfrac{-a-3b-3c-3d}{2}; \dfrac{a+3b+c+d}{2}\right)$. Soit $s(A) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3a-3b-c-3d & a+b+c+3d \\ -a-3b-3c-3d & a+3b+c+d \end{pmatrix}$
9. Hum, ça ne va pas être beau, faisons avec des vecteurs encore une fois, et sans fraction : $4s \circ s(a,b,c,d) = (-3(-3a-3b-c-3d) - 3(a+b+c+3d) - (-a-3b-3c-3d) - 3(a+3b+c+d); (-3a-3b-c-3d) + (a+b+c+3d) + (-a-3b-3c-3d) + 3(a+3b+c+d); -(-3a-3b-c-3d) - 3(a+b+c+3d) - 3(-a-3b-3c-3d) - 3(a+3b+c+d); (-3a-3b-c-3d) + 3(a+b+c+3d) + (-a-3b-3c-3d) + (a+3b+c+d)) = (4a; 4b; 4c; 4d)$. Eh oui, miracle, on retrouve bien que $s \circ s(a,b,c,d) = (a,b,c,d)$, autrement dit que $s \circ s = \mathrm{id}$, ce qui est normal pour une symétrie.

# Exercice 3

1. (a) Il n'y a même pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{n}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{n}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0$, ce qui coïncide avec la valeur imposée pour $f_n(0)$ et prouve donc la continuité à droite de $f_n$ en 0.

   (b) On peut passer directement par le taux d'accroissement : $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = e^{-\frac{n}{x}}$. D'après les calculs précédents, ce taux d'accroissement tend vers 0 en $0^+$, donc $f_n$ est dérivable à droite en 0, et y admet une demi-tangente horizontale.

2. (a) La fonction $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions usuelles. On calcule $f_n'(x) = e^{-\frac{n}{x}} + \dfrac{n}{x^2} \times x e^{-\frac{n}{x}} = \left(\dfrac{x+n}{x}\right) e^{-\frac{n}{x}}$. Sur $]0, +\infty[$, cette dérivée est toujours positive. Elle s'annule pour $x = -n$, est positive également sur $]-\infty, -n]$, et négative sur $[-n, 0[$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 1$, on obtient facilement $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. En $0^-$, il faut invoquer la croissance comparée. Si on veut être très rigoureux, on pose $X = -\dfrac{n}{x}$, $\underset{x \to 0^-}{X} = +\infty$, et $f_n(x) = -n\dfrac{e^X}{X}$, qui a pour limite $-\infty$ par croissance comparée.

3. (a) Rappelons donc que $e^u \underset{u \to 0}{=} 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

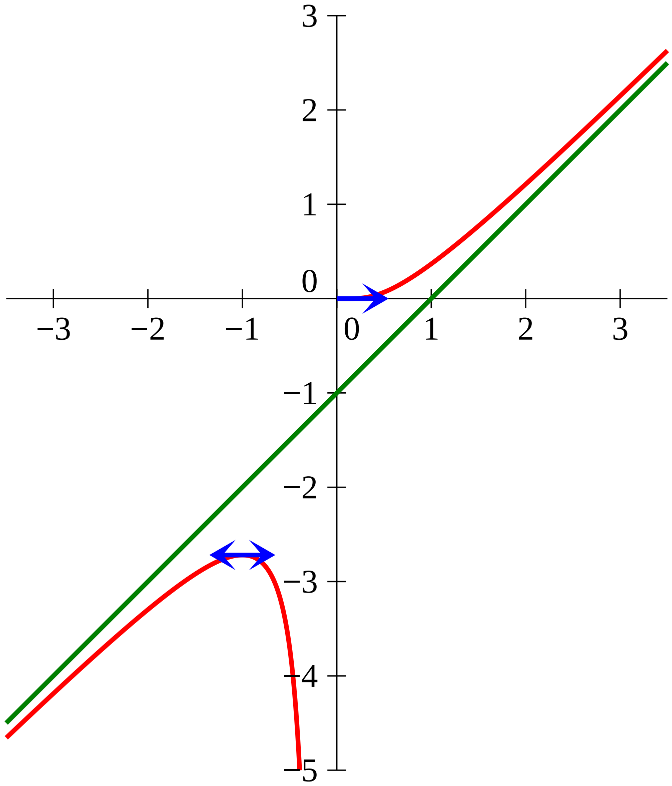
   (b) Puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{n}{x}} = 0$, on peut appliquer le développement limité précédent à $u = \dfrac{-n}{x}$ pour obtenir $e^{-\frac{n}{x}} \underset{x \to \pm\infty}{=} 1 - \dfrac{n}{x} + \dfrac{n^2}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Il ne reste plus qu'à multiplier le tout par $x$ pour trouver le résultat demandé.

   (c) En particulier, $f_n(x) = x - n + o(1)$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x - n$ est asymptote oblique à la courbe à la fois en $+\infty$ et en $-\infty$. Par ailleurs, le terme suivant du développement est du signe de $x$, donc la courbe sera située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$, et en-dessous au voisinage de $-\infty$.

(d) Récapitulons le tableau de variations de la fonction $f_1$, en calculant $f_1(-1) = -e^1 = -e$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-e$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Sur la courbe, on indique bien entendu la demi-tangente en 0 et l'asymptote :




4. (a) Sur $\mathbb{R}^{-*}$, la fonction $f_n$ est toujours strictement négative, donc ne peut pas prendre la valeur 1. Sur $[0, +\infty[$, $f_n$ est continue et strictement croissante, et effectue une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. En particulier, 1 admet un unique antécédent (strictement positif) par $f_n$.

   (b) Il suffit pour cela de calculer $f_n(1) = e^{-n} < 1$. La fonction étant strictement croissante sur $\mathbb{R}+$, $1 < u_n$. Par ailleurs, $u_n e^{-\frac{n}{u_n}} = 1$ implique, en passant au ln, que $\ln(u_n) - \dfrac{n}{u_n} = 0$, soit $u_n \ln(u_n) = n$.

   (c) La fonction $g$ est dérivable sur $[1, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \ln(x) + 1 > 0$, elle est donc strictement croissante et bijective. Comme $g(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, la fonction $g$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. La fonction $g^{-1}$ est donc définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x) = +\infty$. Comme $u_n = g^{-1}(n)$ (c'est une conséquence immédiate des résultats de la question précédente), on peut en effet en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   (d) On sait déjà que $u_n \ln(u_n) = n$, et les deux membres étant supérieurs ou égaux à 1, on peut prendre le ln des deux côtés pour obtenir $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$. Or, en posant $X = \ln(u_n)$, qui tend vers $+\infty$, on peut affirmer en utilisant la croissance comparée que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$, c'est-à-dire que $\ln(\ln(u_n)) = o(\ln(u_n))$. On en déduit que $\ln(n) = \ln(n) + \ln(\ln(n)) \sim \ln(u_n)$. Attention à ne pas en déduire que $u_n$ est équivalente à $n$, ce serait faux ! Reprenons plutôt l'égalité $u_n \ln(u_n) = n$. en appliquant l'équivalent qu'on vient d'obtenir, $u_n = \frac{n}{\ln(u_n)} \sim \frac{n}{\ln(n)}$.

5. (a) C'est une conséquence directe du fait que $u_n = g^{-1}(n)$ et que la fonction $g^{-1}$ a le même sens de variations que $g$, donc est croissante.

   (b) Par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}}$. On peut alors calculer $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}e^{-\frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{n+1}{u_{n+1}}-\frac{n}{u_{n+1}}} = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.

   (c) La fonction $f_n$ est croissante sur $[u_n, u_{n+1}]$, minorée par $f_n(u_n) = 1$ et majorée par $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$, on peut donc encadrer $I_n$ en écrivant $\int_{u_n}^{u_{n+1}} 1\ dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\ dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} e^{\frac{1}{u_{n+1}}}\ dt$. Autrement dit, $u_{n+1}-u_n \leq I_n \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}(u_{n+1}-u_n)$. Comme $u_{n+1}-u_n > 0$, on divise pour obtenir l'encadrement souhaité.

   (d) Le membre de droite de l'encadrement précédent a pour limite 1 quand $n$ tend vers $+\infty$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{u_{n+1}-u_n} = 1$, soit $I_n \sim u_{n+1} - u_n$.