TD n°9 : révisions pour le DS7

PTSI B Lycée Eiffel

28 avril 2016

Exercice 1

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2+1)P(1) + P$.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Rappeler quelle est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et déterminer les images par φ de chacun de ses éléments. En déduire si l'application φ est injective, surjective ou bijective (interdiction de calculer le noyau de φ pour cette question).
3. Montrer que $\varphi^2 - 4\varphi + 3\,\mathrm{id} = 0$.
4. En déduire une expression de $\varphi^{-1}(P)$, d'abord en fonction de $\varphi(P)$, puis explicitement.
5. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $F = \ker(\varphi - \mathrm{id})$ et $G = \ker(\varphi - 3\,\mathrm{id})$ (aucun des deux ne doit être réduit à 0 !).
6. Montrer que la famille obtenue en regroupant les deux bases calculées à la question précédente est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dans cette base.
7. Montrer que $\varphi = p + 3q$, où p est le projecteur sur F parallèlement à G, et q le projecteur sur G parallèlement à F.

Exercice 2

On rappelle que, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sa trace est définie par $\mathrm{Tr}(A) = a + d$. On considère ensuite l'application f définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = \mathrm{Tr}(A)B + CA$, où $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la dimension de $\ker(\mathrm{Tr})$, ainsi qu'une base de son noyau.
3. Montrer que f est une application linéaire.
4. Déterminer $f(B)$ et $f(C)$.
5. Calculer le noyau et l'image de f (on en donnera une base), et préciser leurs dimensions respectives.
6. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Déterminer les coordonnées d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ obtenue en regroupant celles de $\ker(f)$ et de $\mathrm{im}(f)$.
8. En déduire l'expression explicite de la symétrie s par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à $\mathrm{im}(f)$.
9. Calculer $s \circ s$ à partir de l'expression obtenue à la question précédente, et vérifier la cohérence du résultat obtenu.

Exercice 3

Dans cet exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.
On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   (b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.
3. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a :
   $f_n(x) = x - n + \dfrac{n^2}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote oblique D_n dont on donnera une équation. Préciser la position relative de D_n et C_n aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
   (d) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_1$.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
   (b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.
   (c) Montrer que la fonction $g : x \mapsto x\ln(x)$ réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
   (d) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. En déduire un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
5. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.
   (b) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.
   (c) On pose $I_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)\, dt$. Montrer que : $1 \leq \dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leq e^{\frac{1}{u_{n+1}}}$.
   (d) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.