TD n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 février 2016

Exercice 1

1. Pour décomposer le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, il faut déterminer ses racines complexes, c'est-à-dire les racines quatrièmes du nombre $z = -16 = 16e^{i\pi}$. On sait les calculer facilement : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $z_2 = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})} = 2ie^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $z_3 = -z_1 = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ et $z_4 = -iz_1 = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$. On peut donc écrire $P = (X-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(X+\sqrt{2}-i\sqrt{2})(X+\sqrt{2}+i\sqrt{2})(X-\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis regrouper les facteurs correspondant aux racines conjuguées (z_1 et z_4 d'un côté, z_2 et z_3 de l'autre) pour trouver $P = (X^2-2\sqrt{2}X+4)(X^2+2\sqrt{2}X+4)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. On cherche quatre coefficients a, b, c et d tels que $\dfrac{1}{x^4+16} = \dfrac{ax+b}{x^2-2\sqrt{2}x+4} + \dfrac{cx+d}{x^2+2\sqrt{2}+4}$. Le plus simple est de faire une identification brutale : si on met les deux fractions du membre de droite au même dénominateur (qui vaut bien sûr x^4+1), le numérateur devient $(ax+b)(x^2+2\sqrt{2}x+4)+(cx+d)(x^2-2\sqrt{2}x+4) = (a+c)x^3+(2a\sqrt{2}-2c\sqrt{2}+b+d)x^2+(2b\sqrt{2}-2d\sqrt{2}+4a+4c)x+4b+4d$. Ce numérateur doit être égal à 1. Par identification des coefficients, on obtient le système $\begin{cases} a+c=0 \\ (2a-2c)\sqrt{2}+b+d=0 \\ (2b-2d)\sqrt{2}+4(a+c)=0 \\ 4(b+d)=1 \end{cases}$. En introduisant la condition $a+c=0$ dans la troisième équation, on en déduit que $b-d=0$, ce qui donne à l'aide de la dernière équation $b=d=\dfrac{1}{8}$. Par ailleurs, $c=-a$, et la deuxième équation peut donc s'écrire $4\sqrt{2}a+\dfrac{1}{4}=0$, soit $a = -\dfrac{1}{16\sqrt{2}}$. Conclusion : $\dfrac{1}{x^4+16} = \dfrac{1}{16\sqrt{2}}\left(\dfrac{-x+2\sqrt{2}}{x^2-2\sqrt{2}x+4} + \dfrac{x+2\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}x+4}\right)$.
3. Vu le résultat obtenu à la question précédente, on peut commencer par calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{x+2\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}x+4}\,dx = \int_0^\alpha \frac{1}{2}\times\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}x+4}\,dx + \int_0^\alpha \frac{\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}x+4}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2+2\sqrt{2}x+4)]_0^\alpha + \int_0^\alpha \frac{\sqrt{2}}{(x+\sqrt{2})^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+2\sqrt{2}\alpha+4)-\ln(2)+\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{(\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+2\sqrt{2}\alpha+4)-\ln(2)+\left[\arctan\left(\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^\alpha = \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+2\sqrt{2}\alpha+4)-\ln(2)+\arctan\left(\frac{\alpha-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{3}$. Quel beau calcul ! On a très envie de recommencer pour l'autre morceau, mais avec un peu de mauvaise foi, on peut ne pas refaire tout le calcul puisque quasiment rien ne changera : un signe moins dans la partie qui va donner un ln, et comme il reste toujours $\sqrt{2}$ au numérateur du second morceau, on obtiendra de même une arctange pour ce qui reste, avec simplement un signe moins dans l'arctangente. Bref, $I_2 = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{x+2\sqrt{2}}{x^2-2\sqrt{2}x+4}\,dx = -\frac{1}{2}[\ln(x^2-2\sqrt{2}x+4)]_0^\alpha + \left[\arctan\left(\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^\alpha = -\frac{1}{2}\ln(\alpha^2 -$

$2\sqrt{2}\alpha + 4) + \ln(2) + \arctan\left(\dfrac{\alpha - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \dfrac{\pi}{3}$. En regroupant, les constantes se simplifient, et on peut mettre ensemble les deux ln pour trouver la superbe formule suivante :

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{1}{x^4+16}\,dx = \frac{1}{16\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha^2+2\sqrt{2}\alpha+4}{\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha+4}\right) + \arctan\left(\frac{\alpha+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \arctan\left(\frac{\alpha-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

.

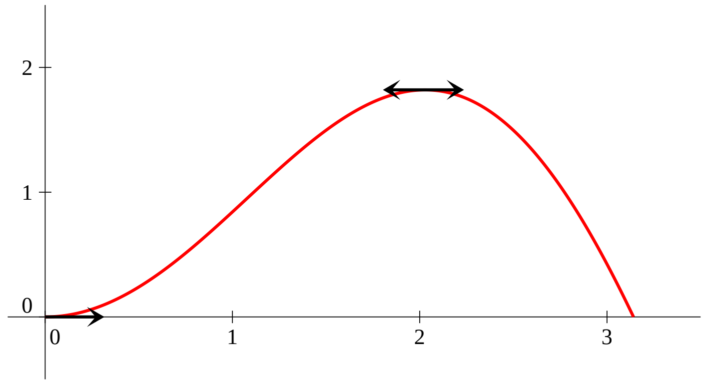
4. Ah, enfin un calcul facile. Ce qui se trouve dans le ln tend vers 1 quand α tend vers $+\infty$ (c'est un simple quotient de polynômes) alors que ce qui se trouve dans chaque arctangente tend manifestement vers $+\infty$. On a donc simplement $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \dfrac{1}{16\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{16\sqrt{2}}$.

Exercice 2

I. Une équation différentielle.

1. Sur chacun des deux intervalles, on peut normaliser l'équation pour la mettre sous la forme $y' + \tan(x)y = \dfrac{x}{\cos(x)} + \sin(x)$. Une primitive de la fonction $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est la fonction $x \mapsto -\ln(|\cos(x)|)$, les solutions de l'équation homogène $y' + \tan(x)y = 0$ sont donc de la forme $y_h(x) = Ke^{\ln(|\cos(x)|} = K|\cos(x)|$. Autrement dit, $y_h(x) = K\cos(x)$, avec $K \in \mathbb{R}$, quand on est sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et $y_h(x) = L\cos(x)$, avec $L \in \mathbb{R}$, sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ (quitte à changer le signe de la constante). Comme on ne voit absolument pas à quoi sert l'indication donnée par l'énoncé, contentons-nous d'essayer d'appliquer la variation de la constante, et posons donc $y_p(x) = K(x)\cos(x)$, d'où $y_p'(x) = K'(x)\cos(x) - K(x)\sin(x)$. La fonction y_p est solution de l'équation normalisée si $K'(x)\cos(x) - K(x)\sin(x) + K(x)\sin(x) = \dfrac{x}{\cos(x)} + \sin(x)$, soit $K'(x) = \dfrac{x}{\cos^2(x)} + \tan(x)$. On peut faire une IPP sur le premier morceau en posant $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et $v'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, donc $v(x) = \tan(x)$. On trouve alors $K(x) = x\tan(x) - \displaystyle\int \tan(x)\,dx + \int \tan(x)\,dx = x\tan(x)$. Notre solution particulière sera donc $y_p(x) = x\sin(x)$. Les solutions de l'équation complète sont alors les fonctions $y : x \mapsto x\sin(x) + K\cos(x)$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et $y : x \mapsto x\sin(x) + L\cos(x)$ sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.
2. Si on veut pouvoir recoller des solutions sur I tout entier, il faut qu'elles aient une limite finie et commune en $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui sera toujours le cas avec les formules obtenues (la limite en question étant égale à $\dfrac{\pi}{2}$). Il faut par ailleurs que leurs dérivées aient la même limite en $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui impose $K = L$. Il y a donc une infinité de solutions définies sur I, de la forme $x \mapsto x\sin(x) + K\cos(x)$.
3. Ah, une question triviale, il suffit de prendre $K = 0$, la solution cherchée est donc la fonction $f : x \mapsto x\sin(x)$.
4. Attention à ne pas oublier que f n'est définie que sur $[0, \pi]$ pour le tableau de variations. La fonction f est manifestement dérivable autant de fois qu'on veut, et $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$. Cette dérivée s'annule bien sûr en 0, mais elle est ensuite clairement positive sur tout l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, le sinus est décroissant, et $x \mapsto x\cos(x)$ aussi (puisque $\cos(x)$ est de plus en plus négatif et x de plus en plus grand ; si on y tient, on dérive ce morceau et on constate que ce qu'on obtient est trivialement négatif sur l'intervalle en question), donc f' est décroissante. Comme $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f'(\pi) = -\pi$, la fonction f' est bijective de $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ vers $[-\pi, 1]$ et en particulier s'annule une sule fois sur cet intervalle. On peut constater à la main

que la valeur d'annulation doit être légèrement inférieure à $\dfrac{2\pi}{3}$ puisque $f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{3}$, qui est légèrement négatif. Il faut recourir à des outils numériques (horreur !) pour obtenir une valeur plus précise (très proche de 2) pour l'abscisse du maximum de f, qu'on notera simplement β. Bien sûr, c'est la même chose pour $f(\beta)$, qui vaut environ 1.8 (on obtient une approximation passable en remplaçant β par $\dfrac{2\pi}{3}$). On peut toujours indiquer que $f(\pi) = 0$, et on devrait se rapprocher de l'allure de courbe suivante :



II. Une suite récurrente.

1. La fonction g est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ (c'est la somme de deux fonctions strictement croissante. Comme $g(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty$, g est bijective de $\left]O, \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}^{+*}$, et ne s'annule donc pas sur cet intervalle. De même, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} g(x) = -\infty$ et $g(\pi) = \pi$, donc g est bijective de $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ vers $]-\infty, \pi]$, et s'annule donc une seul fois sur cet intervalle. Le réel α appartient donc à l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. De plus, $g(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \tan(\sqrt{3})$, et on sait que $\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Or, $\sqrt{3} < \dfrac{2\pi}{3}$ (l'un est plus petit que 2, l'autre plus grand), et la tangente est croissante sur notre intervalle, ce dont on déduit que $\tan(\sqrt{3}) < \tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, puis que $g(\sqrt{3}) < 0$. Le réel α est donc bien dans l'intervalle $[\sqrt{3}, \pi]$.
2. Par définition, $g(\alpha) = 0$ donc $\tan(\alpha) = -\alpha$. On a bien envie de composer cette égalité par la fonction arctan, mais il faut faire attention : $\arctan(-\alpha) = -\arctan(\alpha)$ car arctan est impaire, mais $\arctan(\tan(\alpha) = \alpha - \pi$ car l'angle α n'appartient pas à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (mais $\alpha - \pi$, lui, est dans cet intervalle, donc égal à l'arctangente de sa tangente). Finalement, on obtient $\alpha - \pi = -\arctan(\alpha)$, ce qui est bien l'égalité demandée par l'énoncé.
3. (a) Il faut en fait simplement montrer que l'intervalle $[\sqrt{3}, \pi]$ est stable par la fonction $f : x \mapsto \pi - \arctan(x)$. Cette fonction est décroissante sur cet intervalle et $f(\sqrt{3}) = \pi - \arctan(\sqrt{(3)}) < \pi$ (ce qui nous suffit pour la stabilité de l'intervalle !). De plus, $g(\pi) = \pi - \arctan(\pi)$, et l'indication de l'énoncé nous permet d'affirmer que $\dfrac{5\pi}{12} > \arctan(\pi)$, donc $g(\pi) > \pi - \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{7\pi}{12}$. Or, $\dfrac{7\pi}{12} > \dfrac{21}{12} = \dfrac{7}{4} > \sqrt{3}$, donc $g(\pi) > \sqrt{3}$ et notre intervalle est bel et bien stable par f. Une récurrence triviale permet alors de prouver que $u_n \in [\sqrt{3}, \pi]$: c'est vrai par hypothèse pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [\sqrt{3}, \pi]$ d'après les calculs précédents.

(b) On a bien sûr envie d'appliquer l'IAF sur l'intervalle $[\sqrt{3}, \pi]$. Les deux valeurs α et u_n appartiennent bien à cet intervalle, reste à majorer $|f'(x)|$ sur l'intervalle. On calcule $|f'(x)| = \dfrac{1}{1+x^2}$, qui est clairement décroissante sur $[\sqrt{3}, \pi]$. Le maximum de $|f'(x)|$ sur l'intervalle est donc égal à $|f'(\sqrt{3})| = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$. On peut alors appliquer l'IAF à u_n et α pour obtenir $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$, ce qui donne bien l'inégalité souhaitée puisque $f(\alpha) = \alpha$ d'après la question 2.

(c) Prouvons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{2}{4^n}$. Au rang 0, on a $|u_0 - \alpha| = \alpha - \sqrt{3} < \pi - \sqrt{3} < 2$, donc la propriété est vraie au rang 0. Si on la suppose vérifée au rang n, on a alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{4^n} = \dfrac{2}{4^{n+1}}$, ce qui prouve l'hérédité. Une fois cette inégalité prouvée, on applique le théorème des gendarmes pour en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

(d) D'après les calculs précédents, il suffit de prendre une valeur de n pour laquelle $\dfrac{2}{4^n} \leq 10^{-3}$, soit $4^n \geq 2000$, ce qui est vrai pour $n = 6$. Il faut alors sortir l'outil du diable pour calculer $u_6 \simeq 2.029$.