TD n°7 : un très vieux sujet d'annales

PTSI B Lycée Eiffel

11 février 2016

Cet énoncé est constitué des deux premiers exercices d'un sujet de concours d'entrée aux petites Mines daté de 1988.

Exercice 1

On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 16$.

1. Décomposer le polynôme P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{P}$.
3. Calculer l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{x^4+16}\,dx$.
4. Déterminer, si elle existe, la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

I. Une équation différentielle.

On considère sur l'intervalle $I = [0, \pi]$ l'équation différentielle (E) :

$$y \sin(x) + y' \cos(x) = x + \sin(x)\cos(x)$$

.

1. Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (on pourra diviser tout par $\cos^2(x)$).
2. Déterminer les solutions éventuelles de (E) sur l'intervalle I.
3. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I vérifiant $f(0) = 0$.
4. Dresser le tableau de variations de f et la représenter graphiquement (on ne demande pas de préciser les points d'inflexion).

II. Une suite récurrente.

On considère la fonction g définie par $g(x) = x + \tan(x)$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, \pi]$, et vérifier que $\alpha \in [\sqrt{3}, \pi]$.
2. Montrer que $\alpha = \pi - \arctan(\alpha)$.
3. On définit une suite (u_n) par $u_0 = \sqrt{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \pi - \arctan(u_n)$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\sqrt{3}, \pi]$ (on pourra utiliser $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3} > \pi$).
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
   (d) Calculer α à 10^{-3} près en justifiant le résultat.