TD n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

4 février 2016

Exercice 1

1. (a) Il s'agit du nombre de permutations des $2n$ personnes, soit $(2n)!$.

   (b) Il faut d'abord choisir la demi-table où vont se trouver tous les hommes, ce qui peut se faire de $2n$ façons (on choisit par exemple le premier siège occupé par un homme lorsqu'on parcourt la table dans le sens trigonométrique, et il y a $2n$ sièges possibles), puis choisir une permutation des n hommes dans cette moitié de table, et une permutation des n femmes sur les places restantes. Cela fait $(2n) \times n!^2$ positionnements possibles.

   (c) Il y a $2n$ choix possibles pour la personne sur le premier siège, puis n pour le deuxième (si le premier était par exemple un homme, il faut mettre une femme ensuite), $n-1$ pour le troisième et quatrième (un homme puis une femme), $n-2$ pour les deux suivants etc. On obtient donc $2 \times n!^2$ possibilités.

   Autre façon de voir les choses : on choisit si on met un homme ou une femme sur le siège 1 (deux possibilités), et il faut ensuite choisir une permutation des n hommes sur les sièges qui leur sont attribués (par exemple les sièges impairs), et de même pour les femmes sur les autres sièges.

2. (a) Le plus simple est de partir des $(2n)!$ positions obtenues à la première question, et de diviser par le nombre de fois où on va compter chaque possibilité une fois que les sièges ne sont plus importants. Chaque possiblité peut être décalée d'un nombre de sièges compris entre 0 et $2n-1$ sans modifier les voisins de tout le monde, mais on peut aussi renverser l'ordre de parcours de la table (géométriquement, on peut composer chacune des $2n$ rotations par une symétrie pour obtenir $2n$ possibilités supplémentaires), il ne reste donc que $\dfrac{(2n)!}{4n} = \dfrac{(2n-1)!}{2}$ possibilités.

   (b) Même principe que ci-dessus : $\dfrac{2 \times n!^2}{4n} = \dfrac{n!(n-1)!}{2}$.

3. Lorsque $n = 3$, on obtient pour la question $1.a$ un nombre de possibilités égal à $6! = 720$; pour la question $1.b$ on tombe à $6 \times 3!^2 = 216$; pour la $1.c$ il y en aura $2 \times 3!^2 = 72$. En enlevant la distinguabilité des sièges, il ne reste que $\dfrac{5!}{2} = 60$ possibilités au total, et $\dfrac{3! \times 2!}{2} = 6$ avec alternance homme-femme. Ces six possibilités sont les suivantes (en notant les personnes $H1$, $H2$ et $H3$ pour les hommes, $F1$, $F2$ et $F3$ pour les femmes ; en commençant toujours la liste à $H1$) : $H1F1H2F2H3F3$; $H1F1H3F2H2F3$; $H1F1H2F3H3F2$; $H1F1H3F3H2F2$; $H1F2H2F1H3F3$ et $H1F2H3F1H2F3$ (toutes les autres sont obtenues à partir de celles-ci par rotation ou symétrie).

Exercice 2

1. Aucune méthode n'était imposée, mais je vais utiliser un pivot de Gauss puisque la plupart d'entre vous ont opté pour cette méthode :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 12 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 12 & -12 \\ 3 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 15 & 18 & -21 \\ 3 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/12 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Calculons : $P - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $(P-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, et $(P-I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui est exactement égal à $2P$. On a donc $(P - I)^3 - 2P = 0$, soit en développant tout $P^3 - 3P^2 + P - I = 0$. On peut écrire cette égalité sous la forme $P(P^2 - 3P + I) = I$, la matrice P est donc inversible, d'inverse $P^2 - 3P + I$. On peut alors calculer $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on vérifie si on le souhaite que ça marche).
3. On calcule encore une fois brillamment $AP = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. De façon extrêmement inattendue, on obtient exactement la même chose pour PT (mais si) !
4. C'est une récurrence hyper classique : pour $n = 0$, on a bien $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$, et si on suppose la formule vraie au rang n, en utilisant le calcul précédent, on aura $A^{n+1} = A \times A^n = APT^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve la formule au rang $n + 1$. Regardons ce qui se passe pour $n = -1$: on calcule d'abord $A^{-1}P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que cette matrice est l'inverse de la

matrice T, ce qui prouve que $P^{-1}A^{-1}P = T^{-1}$, ce qui est équivalent à ce qui était demandé. La formule reste donc vraie pour $n = -1$.

5. On va évidemment procéder par récurrence. La propriété est vrai au rang 0 en posant $\alpha_0 = 0$, et aussi au rang 1 en posant $\alpha_1 = 1$. Supposons que ça marche au rang n, alors $T^{n+1} = T \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2\alpha_n + 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui est bien de la forme souhaitée avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$. Cette suite n'est pas une suite classique, hélas, donc on ne peut pas faire grand chose avec (oui, l'énoncé de la question était un ignoble piège).

6. On pose donc $J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on obtient immédiatement $J^k = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-3)^{k-2}J^2$, pour tout entier $k \geq 2$. Si on tient vraiment à le démontrer par récurrence, on le fait (mais c'est trivial).

7. Puisque $T = J+2I$, on va appliquer la formule du binome (les matrice $2I$ et J commutant bien évidemment) : $T^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k(2I)^{n-k} = 2^nI + n2^{n-1}J + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-3)^{k-2}J^2 = 2^nI + n2^{n-1}J + \frac{1}{9}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-3)^k 2^{n-k}J^2 - 2^nJ^2 + 3n2^{n-1}J^2\right) = 2^nI + n2^{n-1}J + \frac{((3n-2)2^{n-1} + (-1)^n)}{9}J^2$.
Il n'est en fait pas vraiment utile de détailler le calcul de tous les coefficients de T^n, puisqu'on les connait déjà tous sauf celui égal à α_n (rien n'empêche bien entendu dé vérifier que ça donne bien les bonnes valeurs sur la diagonale, ce qui est le cas). On déduit de la formule précédente que $\alpha_n = n2^{n-1}$ (seule la matrice J a un coefficient non nul à cet endroit), ce qui est cohérent avec la relation de récurrence trouvée pour la suite : $2\alpha_n + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n = \alpha_{n+1}$. Finalement, $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Il reste ensuite à calculer $PT^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^{n+1} & n2^n \\ 0 & 2^n & (n+2)2^{n-1} \\ (-1)^n & 2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}$, puis
$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (2-n)2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & (n-2)2^n + 2(-1)^n \\ -n2^{n-1} & 2^n & n2^{n-1} \\ (1-n)2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & (n-1)2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$.

8. (a) Supposons que $AM = MA$, alors $AMP = MAP = MPT$, puis $P^{-1}AMP = P^{-1}MPT$, soit $TP^{-1}MP = P^{-1}MPT$. La matrice $P^{-1}MP$ commute bien avec T. La réciproque se fait exactement de la même façon.

   (b) Bourrinons en posant $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a alors $BT = \begin{pmatrix} -a & 2b & b+2c \\ -d & 2e & e+2f \\ -g & 2h & h+2i \end{pmatrix}$, et $TB = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$. Les deux matrices sont égales si $b = c = d = g = h = 0$ (conditions obtenus facilement en regardant les coefficients hors de la diagonale), et $e = i$ (à cause du coefficient deuxième ligne troisième colonne). Autrement dit, $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

   (c) Le calcul de la question a prouve que les matrices commutant avec A sont de la forme

PBP^{-1}, où B commute avec T. On calcule donc $PB = \begin{pmatrix} a & 2e & 2f \\ 0 & e & e+f \\ a & 2e & e+2f \end{pmatrix}$, puis

$PBP^{-1} = \begin{pmatrix} -a+2e-2f & -2a+2e & 2a-2e+2f \\ -f & e & f \\ -a+e-2f & -2a+2e & 2a-e+2f \end{pmatrix}$. Toutes les matrices de cette forme commutent donc avec A (en particulier A elle-même, qui est obtenue pour $a = -1$, $e = 2$ et $f = 1$, et la matrice identité obtenue lorsque $a = e = 1$ et $f = 0$).

Exercice 3

1. La fonction g_n est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (c'est une somme de deux fonctions croissantes). De plus, $\lim\limits_{x \to 0} g_n(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$. La fonction g_n est donc bijective de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent par g_n.
2. On calcule $g_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \ln(n)$. Puisqu'on a supposé $n \geq 3$, $\ln(n) \geq \ln(3) > 1$, et $g_n\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$. De l'autre côté, $g_n(1) = n > 0$, donc la croissance de la fonction g_n assure que $\dfrac{1}{n} < u_n < 1$.
3. Par définition, $g_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, ce qu'on peut traduire par $\ln(u_{n+1}) = -(n+1)u_{n+1}$. On calcule alors $g_n u_{n+1} = nu_{n+1} + \ln(u_{n+1}) = -u_{n+1} < 0$. Comme $g_n(u_n) = 0$, la croissance de la fonction g_n permet de conclure que $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
4. Supposons donc que (u_n) converge vers $l > 0$. Dans ce cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = +\infty$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = \ln(l)$, ce qui est très contradictoire avec le fait que $nu_n + \ln(u_n) = 0$. Pourtant, la suite étant décroissante et minorée par 0 (puisque $\dfrac{1}{n} \geq 0$), elle converge nécessairement vers une limite positive ou nulle. La seule possibilité est donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
5. On reprend la définition de la suite : $nu_n = -\ln(u_n)$, et on passe tout au logarithme (tout est positif, on peut), en posant pour simplifier les choses $v_n = \dfrac{1}{u_n}$: $\ln(n) - \ln(v_n) = \ln(\ln(v_n))$, donc $\ln(n) = \ln(v_n) + \ln(\ln(v_n))$, et $\dfrac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1 + \dfrac{\ln(\ln(v_n))}{\ln(v_n)}$. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(v_n) = +\infty$, et (par croissance comparée), $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(\ln(v_n))}{\ln(v_n)} = 0$. On conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = 1$. Bien entendu, l'inverse tend aussi vers 1, et $\ln(v_n) = -\ln(u_n)$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = -1$.
6. (a) Posons donc $f(t) = \dfrac{1}{t} - \ln(1+t) + \ln(t)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{-(t+1) - t^2 + t(t+1)}{t^2(t+1)} = \dfrac{-1}{t^2(t+1)} < 0$. La fonction f est donc décroissante. Or, $f(t) = \dfrac{1}{t} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$, qui a une limite nulle en $+\infty$. On en déduit que f est toujours positive, ce qu'on voulait prouver.

   (b) En appliquant le résultat de la question précédent, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$ (il y a un beau télescopage à droite). Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$. Même raisonnement pour S_n : on sait que $u_n \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$, donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 4

1. (a) Il y a $\binom{a+b}{n}$ possibilités si on ne précise rien sur le nombre de filles ou de garçons.

   (b) Il y a $\binom{a}{n}$ groupes possibles uniquement constitués de garçons (si $n \leq a$ bien entendu, sinon il n'y en a pas). Si on veut un garçon exactement dans le groupe, il faut choisir le garçon, et $n-1$ filles, ce qui donne $\binom{a}{1} \times \binom{b}{n-1}$ possibilités. Plus généralement, le nombre de groupes à k garçons vaut $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

   (c) Le nombre total de groupes est la somme des nombres de groupes contenant k garçons, pour toutes les valeurs de k possibles, c'est-à-dire pour k compris entre 0 et n. Autrement dit, $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$, ce qui est exactement la formule de Vandermonde.

2. (a) On sait, d'après la formule du binôme, que $(x+1)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} x^k$. Le coefficient devant x^n est donc égal à $\binom{p+q}{n}$.

   (b) De même que ci-dessus, $P(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k$, et $Q(x) = \sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} x^j$ (j'ai changé le nom de l'indice pour que le raisonnement soit plus lisible). Quand on fait le produit, on obtient donc une grosse somme, pour toutes les valeurs possibles de j et de k, de termes de la forme $\binom{p}{k}\binom{q}{j} x^{k+j}$. Ce terme contribue au terme en x^n de $P(x)Q(x)$ si et seulement si $j+k=n$, soit $j=n-k$. Autrement dit, on a un terme de la forme $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} x^n$. Il faut additionner tous ces termes, c'est-à-dire prendre toutes les valeurs de k comprises entre 0 et n, pour obtenir un coefficient devant x^n égal à $\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{n-k}{q}$.

   (c) Puisque $R(x) = P(x)Q(x)$, les coefficients calculés aux deux questions précédentes doivent être les mêmes. Autrement dit, $\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$. Mis à part le fait que le concepteur du sujet a bizarrement transformé les variables a et b en p et q, on retrouve exactement la formule de Vandermonde.

3. L'indication de l'énoncé n'était pas forcément très claire : on va faire une récurrence sur a en appelant P_a la propriété « $\forall b \in \mathbb{N}, \forall n \leq a+b$, $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ ». Commençons par initialiser pour $a=0$: dans ce cas, la somme du membre de droite de l'égalité ne contient que des termes nuls, sauf pour $n=0$. Cet unique terme restant vaut $\binom{0}{0}\binom{b}{n} = \binom{b}{n}$, ce qui correspond à la valeur attendue. La propriété P_0 est donc vraie. Supposons désormais P_a vraie quelles que soient les valeurs de b et de n, et tentons de prouver P_{a+1}. On veut donc calculer $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{a+1}{k}\binom{n-k}{b}$. Utilisons la formule de Pascal sur le coefficient binomial

de gauche, pour obtenir $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} + \binom{a}{k-1}\binom{b}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{a}{k}\binom{b}{n-1-k}$ (en décalant les indices dans la deuxième somme, le premier terme étant de toute façon nul). On applique alors deux fois notre hypothèse de récurrence (pour deux valeurs de n différentes, mais à chaque fois avec a en haut du premier coefficient binomial, c'est bien ce qu'on a supposé dans l'hypothèse de récurrence) : $A = \dbinom{a+b}{n} + \dbinom{a+b}{n-1} = \dbinom{a+b+1}{n}$ en appliquant de nouveau la relation de Pascal, dans l'autre sens cette fois-ci. On vient de prouver la propriété P_{a+1}, la formule de Vandermonde est donc vérifiée.

4. On prend simplement $a = b = n$ dans la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$. Il ne reste plus qu'à se rappeler que $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$ (symétrie des coefficients binomiaux) pour conclure que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

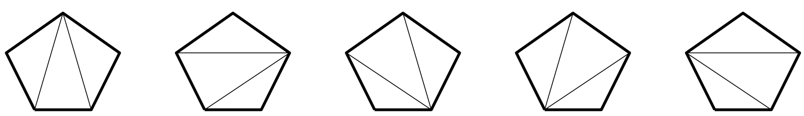
5. (a) Le changement d'indice ne modifie pas les bornes de la somme (on la parcourt juste à l'envers), et $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$, donc on obtient $T_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (n-i)\binom{n}{k}^2$. En additionnant les deux expressions de T_n (on peut noter l'indice k dans la formule qu'on bient d'obtenir, ça ne change rien), on trouve $2T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 + (n-k)\binom{n}{k}^2 = n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = nS_n$. Autrement dit, $T_n = \dfrac{n}{2}S_n = \dfrac{n}{2}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{n \times (2n-1)!}{(n-1)!n!} = n\dbinom{2n-1}{n-1}$ (on peut trouver quantité d'autres expressions équivalentes pour T_n).

   (b) On commence par utiliser la formule sans nom du cours : $T_n = n\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k}$. En utilisant la symétrie des coefficients binomiaux puis la formule de Vandermonde avec $a = n$ et $b = n-1$, on trouve $T_n = n\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{n-k}\binom{n}{k} = n\binom{2n-1}{n}$ (ce qui est la même chose que la dernière formule obtenue auparavant, encore une fois par symétrie des coefficients binomiaux).

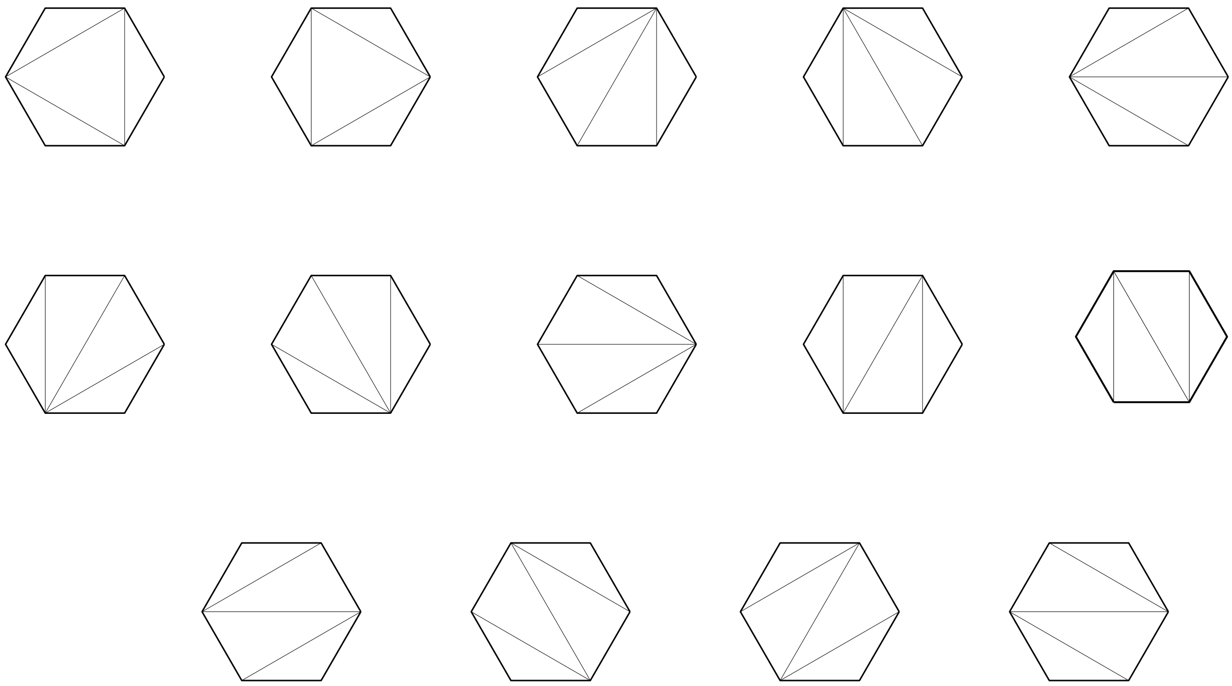
Problème

I. Triangulations de polygônes.

1. Il n'y a qu'une seule façon de trianguler un triangle, c'est de ne rien faire ! On en déduit que $t_1 = 1$. Pour un carré, deux possibilités, on peut le découper suivant l'une ou l'autre des deux diagonales, ce qui donne $t_2 = 2$. Pour les pentagones, autant faire une jolie petite liste de dessins, il doit y en avoir cinq :



2. Eh bien voila, en tentant de trier dans un ordre plus ou moins logique :



3. Une fois le triangle $A_1A_iA_{n+3}$ imposé, il reste à découper en triangles les deux polygones qui sont de part et d'autre de ce triangle. Le premier a pour sommets A_1, A_2, …, A_i, soit i sommets, donc peut être triangulé de t_{i-2} façons. Le deuxième a pour sommets A_i, A_{i+1}, …, A_{n+3}, soit $(n+3)-i+1=n-i+4$ sommets, donc peut être triangulé de t_{n+2-i} façons. Les deux triangulations se faisant indépendamment l'une de l'autre, il y a au total $t_{i-2}t_{n-(i-2)}$ triangulations de notre polygone initial contenant le triangle $A_1A_iA_{n+3}$.
4. Il y a par définition t_{n+1} triangulations pour le polygone considéré à $n+3$ sommets. Chacune de ces triangulations contient exactement un triangle du type $A_1A_iA_{n+3}$, avec $i \in 2,\dots,n+2$ donc il suffit pour obtenir le nombre total de triangulations du polygone d'additionner les nombres obtenus à la question précédente pour toutes les valeurs possibles de i. Autrement dit, $t_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=2}^{i=n+2} c_{i-2}c_{n-(i-2)}$. Un petit décalage d'indice ramène à la formule nettement plus lisible $t_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} t_it_{n-i}$.
5. On calcule successivement $t_1 = t_0 = 1$, puis $t_2 = t_0t_1 + t_1t_0 = 1+1 = 2$; $t_3 = t_0t_2 + t_1^2 + t_2t_0 = 2\times 2+1 = 5$; $t_4 = 2t_0t_3 + 2t_1t_2 = 2\times 5 + 2\times 2 = 14$. Jusque là on retrouve bien les valeurs constatées. Continuons donc : $t_5 = 2t_0t_4 + 2t_1t_3 + t_2^2 = 2\times 14 + 2\times 5 + 2^2 = 42$; et $t_6 = 2t_0t_5 + 2t_1t_4 + 2t_2t_3 = 2\times 42 + 2\times 14 + 2\times 5\times 2 = 132$.

II. Une formule explicite.

1. Calculons donc : $c_0 = \dfrac{1}{1}\times\dbinom{0}{0} = 1$; $c_1 = \dfrac{1}{2}\times\dbinom{2}{1} = 1$; $c_2 = \dfrac{1}{3}\times\dbinom{4}{2} = 2$; et $c_3 = \dfrac{1}{4}\times\dbinom{6}{3} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{6\times 5\times 4}{6} = 5$.
2. Cette question est placée à un endroit curieux dans le problème, puisqu'on ne peut pas déduire facilement des éléments qu'on a pour l'instant le fait que c_n est un entier. En effet, d'après

la définition, $c_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, mais cela ne permet pas de conclure puisque le fait que $\dbinom{2n}{n}$ soit divible par $n+1$ n'a rien de trivial. Même la relation démontrée à la question suivante ne suffit pas à prouver le résultat par récurrence. Il faut attendre les relations de la question 4, et plus précisément la forme du milieu de cette question, pour voir de façon évidente que $c_n \in \mathbb{N}$.

3. C'est un simple calcul : $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n+1}{n+2}\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \dfrac{n!^2}{(2n)!} = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \dfrac{n!^2}{(n+1)!^2} = \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} = \dfrac{4n+2}{n+2}$.

4. Encore du calcul sans grand intérêt : $\dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dfrac{(2n)!}{n(n+1)!(n-1)!} = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = c_n$; $\dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1} = \dfrac{(2n)!}{n!n!} - \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \dfrac{(2n)!(n+1) - (2n)!n}{(n+1)!n!} = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = c_n$; et enfin $\dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n} = \dfrac{2(2n-1)!}{(n+1)n!(n-1)!} = \dfrac{2n(2n-1)!}{(n+1)!n(n-1)!} = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!} = c_n$.

5. (a) Commençons par l'inégalité de gauche : en élevant le tout au carré et en utilisant le calcul de la question 3, il faut donc prouver que $\dfrac{16n^3}{(n+1)^3} \leq \dfrac{4(2n+1)^2}{(n+2)^2}$, soit encore $4n^3(n+2)^2 \leq (2n+1)^2(n+1)^3$. On passe tout à droite et on fait la différence : $(4n^2 + 4n+1)(n^3+3n^2+3n+1) - 4n^3(n^2+4n+4) = 4n^5+16n^4+25n^3+19n^2+7n+1-4n^5-16n^4-16n^3 = 9n^3+19n^2+7n+1$ qui est clairement positif, ce qui prouve l'inégalité de gauche. Passons à celle de droite, qui se ramène plus simplement à $\dfrac{4(2n+1)^2}{(n+2)^2} \leq \dfrac{16(n+1)^3}{(n+2)^3}$, soit $(2n+1)^2(n+2) \leq 4(n+1)^3$. On met une fois de plus tout à droite : $4(n+1)^3 - (4n^2+4n+1)(n+2) = 4n^3+12n^2+12n+4-4n^3-12n^2-9n-2 = 3n+2 > 0$, ce qui prouve la deuxième partie de l'encadrement.

   (b) Tous les nombres présents dans l'encadrement précédent sont positifs, on peut les multiplier entre eux sans difficulté, faisons-le lorsque k varie entre 1 et $n-1$ pour obtenir $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\frac{3}{2}}$. Le terme du milieu se télescope pour donner $\dfrac{c_{n-1+1}}{c_1} = c_n$. Dans celui de gauche, les facteurs 4 donnent un 4^{n-1} puisqu'il y a $n-1$ termes dans le produit, et les puissances $\dfrac{3}{2}$ se telescopent pour laisser $\dfrac{1^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, ce qui prouve exactement l'inégalité de gauche. À droite, on aura également un 4^{n-1}, et les puissances donnent $\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$. Or, $(n+1)^{\frac{3}{2}} \geq n\sqrt{n}$, et $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} \leq 3$, donc $\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \leq \dfrac{3}{n\sqrt{n}}$, ce qui permet de conclure à l'encadrement souhaité.

6. (a) Utilisons donc l'indice généreusement donné par l'énoncé : en posant $i = n-k$, on obtient $\displaystyle T_n = \sum_{k=0}^{k=n} kc_kc_{n-k} = \sum_{i=0}^{i=n}(n-i)c_{n-i}c_i = \sum_{i=0}^{i=n} nc_ic_{n-i} - \sum_{i=0}^{i=n} ic_ic_{n-i} = nS_n - T_n$. On a donc $T_n = nS_n - T_n$, soit $2T_n = S_n$ et donc $T_n = \dfrac{n}{2}S_n$.

   (b) Partons plutôt du membre de droite, et utilisons le résultat de la question 3 en l'écrivant sous la forme $(4k+2)c_k = (k+2)c_{k+1}$: $\displaystyle 4T_n + 3S_n = 4\sum_{k=0}^{k=n} kc_kc_{n-k} + 3\sum_{k=0}^{k=n} c_kc_{n-k} =$

$\sum_{k=0}^{k=n}(4k+3)c_kc_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n}(4k+2)c_kc_{n-k} + \sum_{k=0}^{k=n} c_kc_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n}(k+2)c_{k+1}c_{n-k} + S_n$. Faisons maintenant un petit changement d'indice en posant $i = k+1$ dans la première somme, et on a $4T_n + 3S_n = \sum_{i=1}^{i=n+1}(i+1)c_ic_{n+1-i} + S_n = \sum_{i=0}^{i=n+1}(i+1)c_ic_{n+1-i} - c_0c_{n+1} + S_n$. Or, $c_0 = 1$, donc $c_0c_{n+1} = c_{n+1}$ qui, par hypothèse est égal à S_n. Il nous reste donc $4T_n + 3S_n = \sum_{i=0}^{i=n+1}(i+1)c_ic_{n+1-i} = \sum_{i=0}^{i=n+1} ic_ic_{n+1-i} + \sum_{i=0}^{i=n+1} c_ic_{n+1-i} = T_{n+1} + S_{n+1}$, et la formule est démontrée.

(c) Au rang 0, le résultat est vrai : $S_0 = 1 = c_1$. Supposant maintenant le résultat vrai au rang n, et combinons les résultats des questions a et b pour trouver $\frac{n+1}{2}S_{n+1} + S_{n+1} = 4 \times \frac{n}{2}S_n + 3S_n$, soit (en multipliant tout par 2) $(n+3)S_{n+1} = (4n+6)S_n$. Autrement dit, en utilisant notre hypothèse de récurrence, $S_{n+1} = \frac{4n+6}{n+3}c_{n+1}$. Or, on sait en appliquant le résultat de la question 3 pour $k = n+1$ que $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} = \frac{4(n+1)+2}{n+1+2} = \frac{4n+6}{n+3}$. On en déduit que $S_{n+1} = c_{n+2}$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.

(d) On peut encore une fois procéder par récurrence, mais il faut faire une récurrence forte. Au rang 0, on sait que $t_0 = c_0 = 1$. Supposons donc les égalités vérifiées jusqu'à un certain entier n. On a alors $\sum_{k=0}^{k=n} c_kc_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} t_kt_{n-k}$, puisque les termes apparaissant dans les deux sommes sont les mêmes par hypothèse de récurrence. On en déduit que $t_{n+1} = c_{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

III. Le retour du dénombrement.

1. (a) Assez clairement, $\delta_{n,0} = 1$ puisqu'on ne peut se rendre en un point situé sur l'axe des abscisses qu'en se déplaçant toujours vers la droite. Et $\delta_{n,m} = 0$ si $n > m$ puisque le point est situé au-dessus de Δ.

(b) Pour atteindre le point (n,n), le dernier déplacement effectué sera nécessairement un déplacement vers le haut (sinon, on viendrait d'un point qui n'est pas en-dessous de Δ), c'est-à-dire un déplacement venant compléter un début de chemin menant au point $(n, n-1)$. Réciproquement, tout chemin menant à $(n, n-1)$ se complète en un chemin menant à (n,n) en lui ajoutant un déplacement vers le haut. Il y a donc autant de chemins menant à $(n, n-1)$ que de chemins menant à (n,n), et $\delta_{n,n} = \delta_{n,n-1}$. Le principe est exactement le même pour la deuxième formule, mais en distinguant cette fois deux types de chemins : ceux pour lequel le dernier déplacement s'est effectué vers la droite (venant donc du point $(n-1, m)$) et ceux ayant un dernier déplacement vers le haut (venant de $(n, m-1)$). Les deux catégories de chemins formant des ensembles disjoints, l'égalité en découle (on considérera évidemment que $\delta_{n,m-1} = 0$ si $m = 0$).

(c) D'après la question précédente, $\delta_{n,1} = \delta_{n-1,1} + \delta_{n,0} = \delta_{n-1,1} + 1$. Autrement dit, la suite $(\delta_{n,1})$ est arithmétique de raison 1, et comme $\delta_{1,1} = 1$ (un seul chemin possible : un pas vers la droite puis un vers le haut), on trouve $\delta_{n,1} = n$. On procède de même pour le deuxième calcul : $\delta_{n,2} = \delta_{n-1,2} + \delta_{n,1} = \delta_{n-1,2} + n$. Là encore, il nous faut une initialisation : $\delta_{2,2} = \delta_{2,1} = 2$ en utilisant la première relation du b. On en déduit que $\delta_{n,2} = 2 + \sum_{k=3}^{n} k = 2 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 - 2 = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$.

(d) Tout se calcule sans difficulté à l'aide des relations de la question b :

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	2				
$n=3$	1	3	5	5			
$n=4$	1	4	9	14	14		
$n=5$	1	5	14	28	42	42	
$n=6$	1	6	20	48	90	132	132

On remarque que les valeurs diagonales ressemblent vraiment étrangement aux premiers termes de la suite (c_n).

2. (a) Il faut quand même réussir à faire varier n et m simultanément. Au rang $n=0$, la seule valeur possible de m est 0, et $\dfrac{n-0+1}{n+1}\dbinom{n+0}{n} = 1 = \delta_{0,0}$ donc ça va. Supposons les formules vraies pour un certain entier n, pour toutes les valeurs de m inférieures ou égales à n, et tentons de les prouver au rang $n+1$. Pour cela, on va procéder par récurrence sur m, pour m variant entre 0 et $n+1$. Pour $m=0$, on a $\dfrac{n+1-0+1}{n+1+1}\dbinom{n+1+0}{n+1} = 1 = \delta_{n+1,0}$, la formule est correcte. Supposons maintenant la formule vérifiée pour $\delta_{n+1,m}$, alors $\delta_{n+1,m+1} = \delta_{n,m+1} + \delta_{n+1,m}$. On utilise simultanément les hypothèses de récurrence de la « grande » récurrence et de la « petite » récurrence pour remplacer :
$\delta_{n+1,m+1} = \dfrac{n-m}{n+1}\dbinom{n+1+m}{n} + \dfrac{n+2-m}{n+2}\dbinom{n+1+m}{n+1}$
$= \dfrac{(n-m)(n+m+1)!}{(n+1)n!(m+1)!} + \dfrac{(n+2-m)(n+m+1)!}{(n+2)(n+1)!m!}$
$= \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!}\left(n-m+\dfrac{(n+2-m)(m+1)}{n+2}\right)$
$= \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \times \dfrac{n^2+2n-nm-2m+nm+n+2m+2-m^2-m}{n+2}$
$= \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \times \dfrac{n^2+3n-m^2-m+2}{n+2}$. On devrait obtenir pour achever la récurrence $\dfrac{n-m+1}{n+2}\dfrac{(n+m+2)!}{(n+1)!(m+1)!} = \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!(m+1)!} \times \dfrac{(n-m+1)(n+m+2)}{n+2}$. Le numérateur de la deuxième fraction vaut $n^2+nm+2n-mn-m^2-2m+n+m+2 = n^2+3n-m^2-m+2$. Oh, miracle, ça marche !

   (b) Remplaçons donc m par n dans la formule obtenue :
$\delta_{n,n} = \dfrac{n-n+1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n} = c_n$.

3. (a) Un tel chemin commence forcément par un pas vers la droite et achève par un pas vers le haut. Entre deux, on effectue un déplacement du point $(1,0)$ au point $(n,n-1)$, le tout sans passer au-dessus de la droite d'équation $y=x-1$ puisqu'on ne veut pas croiser Δ. Quitte à décaler notre repère d'une unité vers la gauche, ces chemins sont les même que ceux menant de l'origine au point $(n-1,n-1)$ sans passer au-dessus de Δ, qui sont par définition en nombre égal à $\delta_{n-1,n-1} = c_{n-1}$.

   (b) Un tel chemin est composé de deux morceaux : un premier morceau menant de $(0,0)$ à (k,k) sans retoucher la diagonale (on vient de voir qu'il y en a c_{k-1}) puis un second menant de (k,k) vers (n,n) en restant simplement en-dessous de Δ mais en pouvant la croiser, ce qui est exactement équivalent à partir de l'origine et aller jusqu'à $(n-k,n-k)$ en restant en-dessous de Δ (on décale cette fois de k unités sur la diagonale). Il y a donc c_{n-k} chemins possibles pour la seconde moitié du parcours. Les choix des deux moitiés étant complètement indépendants, on a au total $c_{k-1}c_{n-k}$ possibilités.

(c) On peut partitionner l'ensemble des chemins selon leur premier point de rencontre avec Δ (en faisant une catégorie supplémentaire pour ceux qui ne recroisent pas Δ). On obtient bien tous les chemins ainsi, et comptés une seule fois chacun (puisque le premier point de contact avec Δ est certainement unique). La somme des nombres de chemins correspondants donnera alors $\delta_{n,n}$. Autrement dit, $\delta_{n,n} = \sum_{k=1}^{n-1} c_{k-1}c_{n-k} + c_{n-1}$. Comme $c_0 = 1$, on peut écrire le terme isolé sous la forme c_0c_{n-1} et l'intégrer à la somme pour obtenir exactement la formule souhaitée.