TD n°6 : révisions pour le DS5

PTSI B Lycée Eiffel

4 février 2016

Exercice 1

On souhaite disposer n hommes et n femmes autour d'une table ronde comportant $2n$ places.

1. On suppose dans un premier temps que tous les sièges sont numérotés (donc distinguables).
   (a) Combien y a-t-il de façons différentes de placer les $2n$ personnes autour de la table ?
   (b) Combien de façons d'avoir les n hommes regroupés autour d'une moitié de table (et les n femmes de l'autre côté) ?
   (c) Combien de façons où on a une alternance stricte homme-femme ?
2. On suppose désormais que les sièges importent peu, seul l'ordre dans lequel les personnes sont assises est important (ainsi, si on décale tout le monde de trois sièges par exemple, on considérera que le positionnement reste le même).
   (a) Combien y a-t-il désormais de façons différentes d'asseoir tout le monde ?
   (b) Combien de placements avec alternance stricte homme-femme ?
3. Faire les applications numériques explicites lorsque $n = 3$ (on fera la liste de tous les cas pour la dernière question).

Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $(P - I_3)^3 - 2P$. En déduire que P est inversible, et déterminer P^{-1}.
3. Comparer les matrices AP et PT.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, T^n est de la forme $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, et déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (α_n). De quel type de suite s'agit-il ?
6. On pose $J = T - 2I$. Calculer les premières puissances de J (jusqu'à J^3), puis déterminer J^k pour tout entier k.
7. En déduire une expression détaillée de T^n, puis de A^n (on écrira tous les coefficients de la matrice).
8. Une application des résultats précédents : le calcul du commutant de A.
   (a) Montrer qu'une matrice M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec T.
   (b) Déterminer toutes les matrices commutant avec la matrice T.
   (c) En déduire l'ensemble des matrices commutant avec la matrice A.

Exercice 3

On définit, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction g_n par $g_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution pour tout entier $n \geq 1$. On note désormais u_n cette solution.
2. Montrer que, $\forall n \geq 3$, $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$.
3. Déterminer le signe de $g_n(u_{n+1})$, et en déduire la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer par un raisonnement par l'absurde que (u_n) ne peut pas converger vers une limite strictement positive. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\ln(u_n)}{\ln(n)}$.
6. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Montrer que, $\forall t > 0$, $\frac{1}{t} \geq \ln(t+1) - \ln(t)$.
   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, puis de $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4

On cherche dans cet exercice à démontrer de plusieurs façons différentes la formule de Vandermonde : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$, qui est valable pour tous entiers naturels a et b, et pour les entiers naturels n vérifiant $n \leq a+b$. Les trois premières questions sont évidemment indépendantes, la formule peut être utilisée pour les questions suivantes même si vous n'avez pas traité les premières questions.

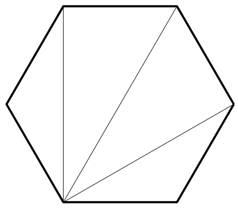
1. Méthode combinatoire : on considère une classe constituée de a garçons et b filles (et donc $a+b$ élèves au total). On souhaite constituer un groupe de n élèves dans cette classe.
   (a) De combien de façons peut-on constituer le groupe ?
   (b) Parmi les groupes possibles, combien y en a-t-il uniquement constitués de garçons ? Combien ne contenant qu'un seul garçon ? Plus généralement, pour un entier k inférieur ou égal à n, combien de groupes contiennent exactement k garçons ?
   (c) En déduire la formule de Vandermonde.
2. Méthode calculatoire : on pose $P(x) = (1+x)^p$, $Q(x) = (1+x)^q$ et $R(x) = (1+x)^{p+q}$.
   (a) Déterminer le coefficient de x^n dans le développement de $R(x)$.
   (b) Déterminer le coefficient de x^n dans le développement de $P(x) \times Q(x)$ (en développant chaque polynôme séparément par la formule du binome de Newton, puis en faisant le produit).
   (c) En déduire la formule de Vandermonde.
3. Méthode brutale : démontrer la formule de Vandermonde par récurrence sur a (on fixe donc les valeurs de a et de n).
4. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ à l'aide de la formule de Vandermonde.
5. On pose désormais $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.
   (a) En effectuant le changement d'indice $i = n-k$, exprimer T_n en fonction de S_n et en déduire la veleur de T_n.
   (b) Retrouver ce résultat en calculant directement la somme définissant T_n (on pourra utiliser une formule du cours, puis la formule de Vandermonde).

Bonus : gros problème de dénombrement !

Ce problème présente quelques dénombrements classiques faisant intervenir une suite de nombres entiers appelés nombres de Catalan, ainsi que l'étude de quelques propriétés de ces nombres. Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes.

I. Triangulations de polygônes.

Trianguler un polygône à n côtés consiste à tracer un certain nombre de cordes dans le polygône (segments reliant deux sommets non adjacents du polygône), de façon à la découper en triangles (les cordes ne doivent donc pas se couper). Ci-dessous, un exemple de triangulation d'un hexagone :



On notera dans cette partie t_n le nombre de triangulations distinctes d'un polygône à $n+2$ côtés (en convenant que $t_0 = 1$).

1. Déterminer les valeurs de t_1, t_2 et t_3 (on pourra faire des petits dessins pour illustrer).
2. Vérifier que $t_4 = 14$ en dessinant les 13 triangulations d'un hexagone régulier distinctes de celle donnée en exemple plus haut.
3. Soient A_1, A_2, …, A_{n+3} les sommets d'un polygône à $n+3$ côtés. Quel est le nombre de triangulations du polygône contenant le triangle $A_1 A_i A_{n+3}$ (pour $k \in \{2, \dots, n+2\}$) ? On exprimera le résultat en fonction des nombres t_i, pour des valeurs de i inférieures ou égales à n.
4. En déduire que, $\forall n \geq 1$, $t_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t_k t_{n-k}$.
5. Vérifier à l'aide de cette relation les valeurs des premiers termes de la suite (t_n), et calculer t_5 et t_6.

II. Une formule explicite.

On note dans cette section $c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ (pour tout entier naturel n).

1. Calculer c_0, c_1, c_2 et c_3.
2. Expliquer pourquoi c_n est toujours un entier naturel.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} c_n$.
4. Prouver toutes les relations suivantes : $c_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n}{n+1} = \dbinom{2n}{n} - \dbinom{2n}{n+1} = \dfrac{2}{n+1}\dbinom{2n-1}{n}$.
5. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \dfrac{c_{n+1}}{c_n} \leq 4\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

   (b) En déduire que $\dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq 3 \times \dfrac{4^{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

6. On note dans cette question $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k}$.

   (a) En effectuant le changement d'indice $i = n - k$, prouver que $T_n = \frac{n}{2} S_n$.

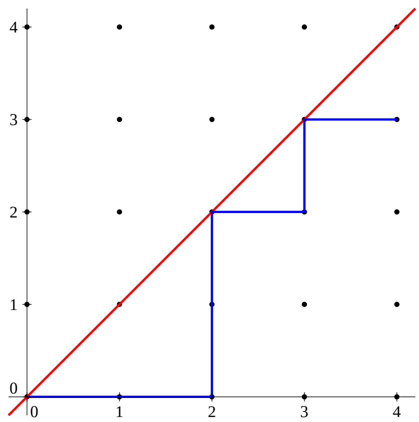
   (b) Montrer que $T_{n+1} + S_{n+1} = 4T_n + 3S_n$.

   (c) Prouver par récurrence, en utilisant les résultats des deux questions précédentes, que $S_n = c_{n+1}$.

   (d) En comparant les relations de récurrence obtenues sur les suites (c_n) et (t_n) (de la première partie du problème), prouver rigoureusement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

III. Le retour du dénombrement.

On considère dans cette partie des chemins menant dans le plan de l'origine du repère jusqu'au point de coordonnées (n, m), en respectant les conditions suivantes : à chaque pas, on se déplace d'une unité vers la droite, ou bien d'une unité vers le haut. On note Δ l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) situés sous la droite d'équation $y = x$ (c'est-à-dire tels que $x \leq y$), et on note $\delta_{n,m}$ le nombre de chemins menant de $(0, 0)$ à (n, m) et situés entièrement dans Δ (autrement dit, ne traversant pas la diagonale). Un exemple avec $(n, m) = (3, 4)$:



1. (a) Que vaut $\delta_{n,0}$ (pour tout entier n) ? Que vaut $\delta_{n,m}$ si $m > n$?

   (b) Justifier que $\delta_{n,n} = \delta_{n,n-1}$ (si $n \geq 1$) et $\delta_{n,m} = \delta_{n-1,m} + \delta_{n,m-1}$ si $m < n$.

   (c) En déduire la valeur de $\delta_{n,1}$ (pour $n \geq 1$) et de $\delta_{n,2}$ (pour $n \geq 2$).

   (d) Donner la liste des $\delta_{n,m}$ pour toutes les valeurs de n et de m inférieures ou égales à 6, en les présentant sous forme d'un tableau de type « triangle de Pascal ». Comparer les valeurs « diagonales » $\delta_{n,n}$ à celles de t_n et de c_n obtenues dans les deux premières parties du problème.

2. (a) Montrer par récurrence sur n que $\delta_{n,m} = \frac{n-m+1}{n+1}\binom{n+m}{n}$.

   (b) En déduire que $\delta_{n,n} = c_n$.

3. (a) Montrer que le nombre de chemins menant de $(0, 0)$ à (n, n) sans croiser la diagonale Δ (ailleurs qu'en $(0, 0)$ et en (n, n), bien évidemment) est égal à c_{n-1} (ou si vous préférez à $\delta_{n-1,n-1}$).

   (b) Montrer que le nombre de chemins menant de $(0, 0)$ à (n, n) en recoupant pour la première fois la diagonale en (k, k) est égal à $c_{k-1}c_{n-k}$.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\delta_{n,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k-1,k-1}\delta_{n-k,n-k}$.