TD n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 janvier 2016

Exercice 1

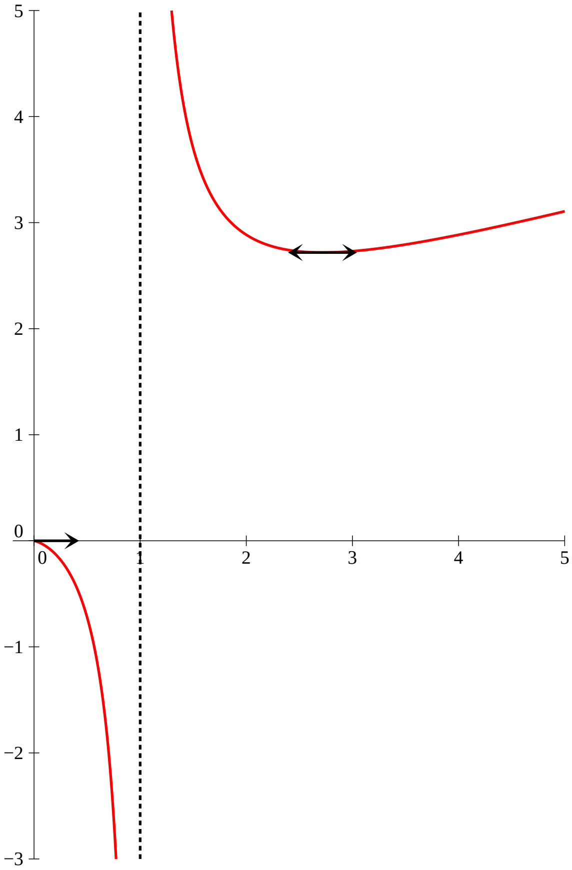
1. Posons donc $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ (on peut le faire puisqu'on a supposé que y ne s'annulait jamais), ou si on préfère $y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$. On peut alors calculer $y'(x) = -\dfrac{z'(x)}{z^2(x)}$, puis replacer dans l'équation différentielle pour obtenir $\dfrac{x^2z'(x)}{z^2(x)} + \dfrac{x}{z(x)} = \dfrac{1}{z^2(x)}$, soit en multipliant tout par $z^2(x)$, l'équation $x^2z'(x) + xz(x) = 1$, qui est bien linéaire.
2. On normalise l'équation (ce qui ne pose pas de problème sur l'intervalle $]1, +\infty[$: $z'(x) + \dfrac{1}{x}z(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Les solutions de l'équation homogène associée à cette équation différentielle sont les fonctions $z_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \dfrac{K}{x}$, pour $K \in \mathbb{R}$. On va appliquer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation sous la forme $z_p(x) = \dfrac{K(x)}{x}$. On aura alors $z_p'(x) = \dfrac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$, et la fonction z_p est donc solution si $\dfrac{xK'(x) - K(x)}{x^2} + \dfrac{K(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, soit $K'(x) = \dfrac{1}{x}$. On peut donc prendre $K(x) = \ln(x)$, soit $z_p(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Les solutions de l'équation complètement sont alors les fonctions de la forme $z : x \mapsto \dfrac{\ln(x) + K}{x}$, et en repassant à l'inverse, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions $y : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x) + K}$. Attention tout de même, il ne faudra prendre que des valeurs de K positives ou nulles, sinon la fonction y n'est pas définie sur tout l'intervalle $]1, +\infty[$.
3. (a) Le quotient $\dfrac{x}{\ln(x)}$ est défini si $x > 0$ (à cause du ln), et si $x \neq 1$ (pour que le ln ne s'annule pas). Comme l'énoncé a imposé qu'on ajoute la valeur 0 à l'ensemble de définition de f, on a donc $\mathcal{D}_f = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

   (b) Il n'y a pas de forme indéterminée : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(x)} = 0$, donc la fonction est bien continue en 0. De plus, f est dérivable sur son domaine de définition (privé de 0 du moins), et $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{(\ln(x))^2}$. En posant $X = \ln(x)$, on a $\lim\limits_{x\to 0} X = -\infty$, et $\lim\limits_{X\to-\infty} \dfrac{1 - X}{X^2} = 0$. Notre dérivée admet donc bien une limite, en l'occurrence nulle, en 0. Cela suffit à justifier que la courbe de notre fonction admettra en 0 une tangente horizontale.

   (c) La dérivée calculée précédemment s'annule lorsque $x = e$, et f admet un minimum local en e de valeur $f(e) = e$. Le calcul des limites de f quand x tend vers 1 ne pose aucun problème, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. D'où le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

(d) Voici une allure de courbe :



4. (a) C'est une récurrence très facile : $u_0 = 3 \geq e$, et en supposant $u_n \geq e$, la croissance de la fonction f sur l'intervalle $[e, +\infty[$ assure que $f(u_n) \geq f(e) = e$, donc $u_{n+1} \geq e$. Tous les termes de la suite sont donc effectivement supérieurs ou égaux à e.

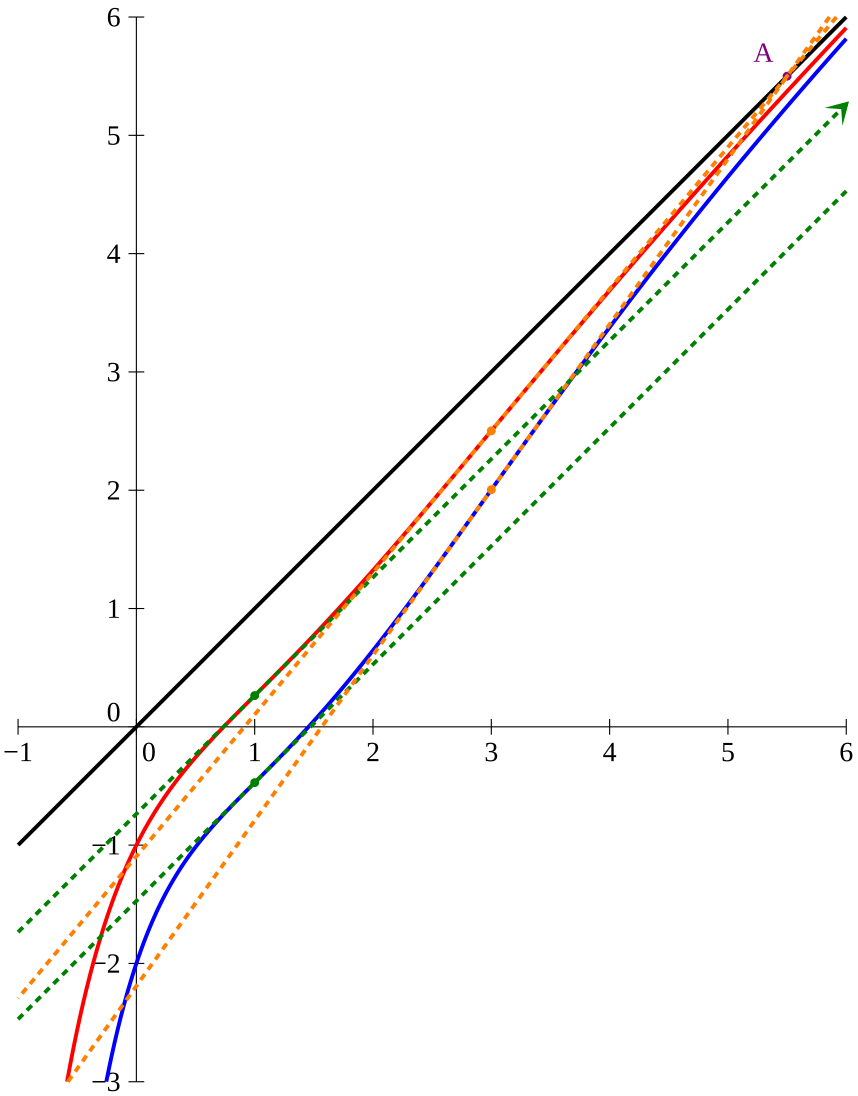
(b) Il faut ici déterminer le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[e, +\infty[$: $f(x) - x = \dfrac{x}{\ln(x)} - x = \dfrac{x(1 - \ln(x))}{\ln(x)}$. Si $x \geq e$, $1 - \ln(x) \leq 0$, donc $f(x) - x \leq 0$. On en déduit, puisque $u_n \geq e$, que $f(u_n) - u_n \leq 0$, soit $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

(c) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par e, elle est nécessairement convergente. Sa limite ne peut être qu'un point fixe de la fonction f. Or, l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution le réel e (et 0 si on y tient, mais la suite ne peut sûrement pas converger vers 0). Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e$.

Exercice 2

1. Considérons donc une fonction de la forme $y(x) = ax+b$. Dans ce cas $y'(x) = a$, et $(1+x^2)y' + (x-1)^2 y = a(1+x^2) + (x^2 - 2x + 1)(ax+b) = a + ax^2 + ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b = ax^3 + (b-a)x^2 + (a-2b)x + a + b$. Par identification des coefficients, la fonction est donc solution de l'équation (E) si $a = 1$; $b - a = -1$; $a - 2b = 1$ et $a + b = 1$. Il suffit donc de prendre $a = 1$ et $b = 0$. Autrement dit, la fonction $y : x \mapsto x$ est solution particulière de (E).

2. En effet, $(x-1)^2 = x^2-2x+1 = (1+x^2)-2x$, donc $\dfrac{(x-1)^2}{2x} = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2}$ a pour primitive $x \mapsto x - \ln(1+x^2)$. L'équation homogène normalisée associée à l'équation (E) pouvant s'écrire $y' + \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}y = 0$, elle admet pour solutions toutes les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-x+\ln(1+x^2)} = Ke^{-x}(1+x^2)$, où $K \in \mathbb{R}$. Notons qu'ici, comme $1+x^2$ ne s'annule jamais, la normalisation ne pose aucun problème, on peut résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Puisqu'on a déjà déterminé plus haut une solution particulière de l'équation (E), les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme $x \mapsto x + Ke^{-x}(1+x^2)$.
3. Dans la forme obtenue à la question précédente, on a $y(0) = K$. Il suffit donc de poser $k = K$, et on trouve bien une solution y_k ayant l'équation annoncée.
4. Deux possibilités pour faire ce calcul. On peut dériver simplement la fonction y_k pour obtenir $y_k'(x) = 1 - ke^{-x}(1+x^2) + 2kxe^{-x} = 1 - ke^{-x}(1+x^2-2x) = 1 - ke^{-x}(x-1)^2$. Pour $x = 1$, on trouve $y_k'(1) = 1$, qui est indépendant de k. Toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent donc en 1 des tangentes de même pente, qui sont parallèles. Autre façon de présenter le calcul : on remplace x par 1 dans l'équation (E) pour obtenir $2y'(1) + 0y(1) = 1-1+1+1$, soit $y'(1) = 1$. La conclusion est évidemment la même.
5. Dérivons une deuxième fois la fonction y_k, on trouve $y_k''(x) = ke^{-x}(x-1)^2 - ke^{-x}(2x-2) = ke^{-x}(x^2-2x+1-2x+2) = ke^{-x}(x^2-4x+3)$. La courbe admet donc un point d'inflexion d'abscisse x si x est solution de l'équation du second degré $x^2-4x+3=0$. Cette condition est effectivement indépendante de la valeur de k, le trinôme a pour discriminant $\Delta = 16-12 = 4$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. Toutes les courbes ont donc deux points d'inflexion d'abscisses 1 et 3.
6. Comme $y_k'(3) = 1 - 4ke^{-3}$ et $y_k(3) = 3 + 10ke^{-3}$, la tangente à la courbe $\mathcal{C}_k$ en 3 a pour équation $y = (1-4ke^{-3})(x-3) + 3 + 10ke^{-3}$. En remplaçant x par $\dfrac{11}{2}$, ou si on préfère $x-3$ par $\dfrac{5}{2}$, on obtient $y = \dfrac{5}{2} - 10ke^{-3} + 3 + 10ke^{-3} = \dfrac{11}{2}$, ce qui prouve bien que la tangente passe toujours par le point A.
7. Il suffit de constater que $y_k(x) - x = ke^{-x}(1+x^2)$, qui a pour limite 0 en $+\infty$ par croissance comparée. La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote oblique à toutes les courbes en $+\infty$ (et coïncide accessoirement avec la courbe $\mathcal{C}_0$). Comme $e^{-x}(1+x^2)$ est toujours positif sur $\mathbb{R}$, le signe de $y_k(x) - x$ est simplement celui de k. Les courbes sont donc toujours au-dessus de l'asymptote lorsque $k > 0$, toujours en-dessous lorsque $k < 0$.
8. Dans ce cas, $ke^{-x}(x-1)^2$ est toujours négatif, donc $y_k'(x) = 1 - ke^{-x}(x-1)^2$ est strictement positif. La fonction y_k est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La limite de y_k en $+\infty$ vaut toujours $+\infty$. De l'autre côté, $\lim\limits_{x\to-\infty} ke^{-x}(1+x^2) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} y_k(x) = -\infty$ (on peut également obtenir cette limite en utilisant que $y_k(x) \leq x$ pour $k \leq 0$). Pour compléter les courbes, on calcule $y_k(1) = 1 + \dfrac{2k}{e}$, ce qui donne $y_{-1}(1) = 1 - \dfrac{2}{e} \simeq 0.26$ et $y_{-2}(1) = 1 - \dfrac{4}{e} \simeq -0.48$. Puisqu'on souhaite tracer les tangentes en 3, calculons également en reprenant les résultats obtenus à la question 3 : $y_{-1}(3) = 3 - 10e^{-3} \simeq 2.5$, et $y_{-2}(3) = 3 - 20e^{-3} \simeq 2$. Inutile de calculer les pentes des tangentes, le fait qu'elles passent par le point A suffit à les tracer. On obtient le graphique suivant (asymptote en noir, $\mathcal{C}_{-1}$ en rouge, $\mathcal{C}_{-2}$ en bleu et tangentes en 3 en pointillés orange, celles en 1 en pointillés verts) :



Exercice 3

A. Quelques cas particuliers.

1. Pour $n = 1$, on a $S_1(z) = 1 + z^2$, donc $S_1(1 + i) = 1 + (1 + i)^2 = 1 + 1 + 2i - 1 = 1 + 2i$. Pour $n = 2$, $S_2(z) = 1 + z^2 + z^4$. Comme $(1 + i)^2 = 2i$, $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$, et $S_2(1 + i) = 2i - 3$.
2. Notons $z = e^{i\theta}$, dans ce cas $\bar{z} = e^{-i\theta}$ et $z^2 = e^{2i\theta}$, donc $\bar{z}S_1(z) = e^{-i\theta}(1 + e^{2i\theta}) = e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos(\theta) \in \mathbb{R}$ (il existe de nombreuses autres façons de présenter le calcul, le recours à la forme exponentielle n'est pas du tout nécessaire). La réciproque est évidemment fausse : si $z \in \mathbb{R}$, alors $S_1(z) \in \mathbb{R}$ et on n'a pas nécessairement $|z| = 1$ (on peut prouver que ce sont les seuls cas possibles).
3. On peut par exemple calculer $S_1(j) = 1 + e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}(e^{\frac{-2i\pi}{3}} + e^{\frac{2i\pi}{3}}) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)e^{\frac{2i\pi}{3}} = -e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Ce nombre a pour module 1, et pour argument $-\frac{\pi}{3}$.
4. L'initialisation est évidente : $S_0(j) = 1$ puisque $S_0(z) = 1$ quel que soit le nombre complexe z. Supposons désormais que $S_{3n}(j) = 1$ pour un certin entier n, alors $S_{3(n+1)}(j) = S_{3n+3}(j) = S_{3n}(j) + j^{6n+2} + j^{6n+4} + j^{6n+6} = 1 + j^{6n+2}(1 + j^2 + j^4)$. Or, $1 + j^2 + j^4 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} =$

$1+e^{\frac{2i\pi}{3}}+e^{-\frac{2i\pi}{3}}=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$. On trouve bien $S_{3n+3}(j)=1$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et, par application du principe de récurrence, pour tous les entiers naturels n.

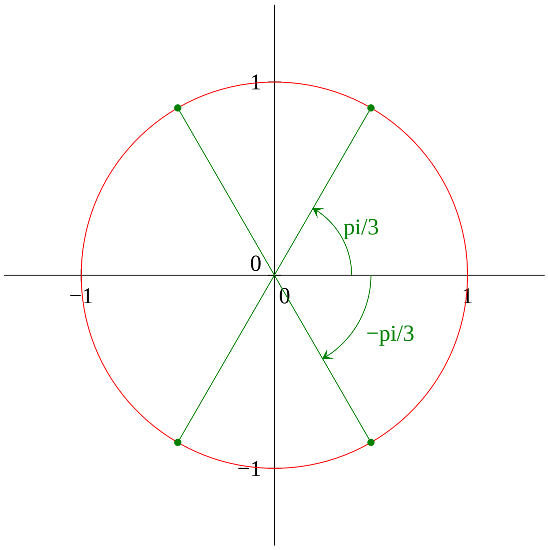
5. Puisqu'on a toujours $1^{2k}=1$, $S_n(1)=\sum_{k=0}^{k=n}1=n+1$. De même pour $z=-1$ (les puissances paires de -1 sont également toutes égales à -1).

B. Étude du cas général.

1. On reconnait dans S_n une somme géométrique de raison z^2, raison qui sera différente de 1 lorsque z est différent de 1 ou -1. On peut donc écrire $S_n(z)=\frac{1-(z^2)^{n+1}}{1-z^2}=\frac{1-z^{2n+2}}{1-z^2}$.
2. Les solutions de l'équation $S_n(z)=0$ sont donc les racines $(2n+2)$-èmes de l'unité, 1 et -1 exclus, autrement dit les complexes de la forme $z^{\frac{2ik\pi}{2n+2}}$, pour $k\in\{1;\dots;2n+1\}\backslash\{n+1\}$. La somme de toutes les racines $(2n+2)$-èmes de l'unité étant nulle, la somme des solutions vaudra 0 puisqu'on a simplement supprimé deux racines dont la somme est nulle.
3. (a) Il suffit de constater que $S_n(z)-\frac{1}{1-z^2}=\frac{-z^{2n+2}}{1-z^2}$, et prendre le module de ce quotient : $|-z^{2n+2}|=|z|^{2n+2}=r^{2n+2}$.
   (b) L'inégalité triangulaire nous permet d'affirmer que $|1|-|z^2|\leq|1-z^2|$, soit $1-r^2\leq|1-z^2|$. Comme r est supposé strictement inférieur à 1, $1-r^2>0$ et on peut passer à l'inverse pour obtenir $\frac{1}{|1-z^2|}\leq\frac{1}{1-r^2}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par r^{2n+2} pour obtenir la majoration souhaitée.
   (c) Le numérateur du membre de droite de l'inégalité précédente est une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1, dont a pour limite 0. Par application du théorème des gendarmes, le membre de gauche qui est positif tend donc lui aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

C. Autour d'une fonction de la variable complexe ...

1. C'est à peu près immédiat : $f(\bar{z})=\frac{1}{1-\bar{z}^2}$, et $\overline{f(z)}=\frac{\bar{1}}{\overline{1-z^2}}=\frac{1}{1-\bar{z}^2}$.
2. Cette équation se ramène à $e^{i\frac{\pi}{4}}(1-z^2)=2z$, soit en multipliant tous les coefficients par $\sqrt{2}$, $(1+i)z^2+2\sqrt{2}z-1-i=0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta=8+4(1+i)^2=8(1+i)=8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Une racine carrée de Δ est donc $\delta=\sqrt{8\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$, et l'équation admet deux solutions $z_1=\frac{\delta-2\sqrt{2}}{2+2i}$, et $z_2=\frac{-\delta-2\sqrt{2}}{2+2i}$.
3. En effet, $|f(z)|=1\Leftrightarrow|1-z^2|=\frac{1}{1}=1\Leftrightarrow|(1-z)(1+z)|=1\Leftrightarrow|1-z|\times|1+z|=1$. Comme $AM=|1-z|$ et $BM=|-1-z|=|1+z|$, l'équivalence demandée en découle.
4. (a) On calcule $f(z)=\frac{1}{1-e^{2i\theta}}=\frac{1}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-e^{i\theta})}=\frac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta}=\frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{2i\sin(\theta)}=\frac{1}{2}-\frac{\cos(\theta)}{2\sin(\theta)}i=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\tan(\theta)}i$
   (b) On veut $|f(z)|^2=1$, soit $\frac{1}{4}+\frac{1}{4\tan^2(\theta)}=1$, soit $4\tan^2(\theta)=\frac{4}{3}$, donc $\tan(\theta)=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. ces valeurs correspondent à $\theta\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$ et $\theta\equiv-\frac{\pi}{3}[\pi]$ (ce qui fait quatre points sur le cercle trigonométrique.


1
pi/3
0
−1
0
1
−pi/3
−1