TD n°6 : révisions pour le DS commun

PTSI B Lycée Eiffel

14 janvier 2016

Exercice 1

On note (E) l'équation différentielle $-x^2y'(x) + xy(x) = y^2(x)$. On recherche les fonctions y solutions de cette équation sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ et ne s'annulant pas sur I.

1. En posant $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$, déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par la fonction z.
2. Résoudre cette équation, et en déduire les solutions de l'équation (E).
3. On pose pour la fin de cet exercice $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$, prolongée en 0 en posant $f(0) = 0$.
   (a) Donner le domaine de définition de la fonction f.
   (b) La fonction f est-elle continue en 0 ? Da dérivée admet-elle une limite en 0 ?
   (c) Calculer la dérivée f' de la fonction f, et étudier les variations de f. On dressera un tableau de variations complet de la fonction, en incluant toutes les limites (justifiées).
   (d) Tracer une allure soignée de la courbe représentative de f.
4. On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est minorée par e.
   (b) Déterminer la monotonie de (u_n).
   (c) En déduire la convergence de la suite vers une limite à préciser.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $(E) : (1 + x^2)y' + (x - 1)^2y = x^3 - x^2 + x + 1$.

1. Déterminer une fonction affine solution particulière de (E).
2. En constatant que $(x - 1)^2 = (1 + x^2) - 2x$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$. En déduire les solutions de l'équation homogène associée à l'équation (E), puis toutes les solutions de l'équation (E).
3. Soit k un réel quelconque. Montrer qu'il existe une unique solution y_k de l'équation vérifiant $y_k(0) = k$, et vérifier que $y_k(x) = x + ke^{-x}(1 + x^2)$. On notera désormais $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k.
4. Calculer $y_k'(1)$. Que peut-on en déduire pour les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 1 ?
5. Montrer que, pour $k \neq 0$, toutes les fonctions y_k ont deux points d'inflexion dont les abscisses ne dépendent pas de la valeur de k.
6. Montrer que toutes les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_k$ en leur point d'abscisse 3 sont coucourantes au point $A\left(\dfrac{11}{2}; \dfrac{11}{2}\right)$.

7. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_k$ admettent une même asymptote oblique en $+\infty$, et déterminer (en fonction de k) la position de la courbe par rapport à son asymptote.
8. Déterminer les variations de y_k dans le cas où $k \leq 0$. Tracer dans un même repère une allure des courbes $\mathcal{C}_{-1}$ et $\mathcal{C}_{-2}$, ainsi que leurs tangentes en 1 et en 3 (en exploitant les calculs des questions précédentes). On rappellera également les valeurs des fonctions correspondantes en 0. On donne $e^{-1} \simeq 0,37$, et $e^{-3} \simeq 0,05$

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct. On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe -1. On rappelle que le nombre complexe j est défini par $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour tout entier naturel n et tout nombre complexe z, on pose $S_n(z) = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n}$.

A. Quelques cas particuliers.

1. Exprimer $S_n(z)$ et calculer $S_n(1+i)$ lorsque $n = 1$, puis $n = 2$.
2. Montrer que, si z est un nombre complexe de module 1, alors $\bar{z}S_1(z)$ est un nombre réel. La réciproque est-elle vraie ?
3. Donner le module et l'argument de $S_1(j)$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $S_{3n}(j) = 1$.
5. Calculer $S_n(z)$ lorsque $z = 1$ ou $z = -1$.

B. Étude du cas général.

Dans cette partie on suppose que z est distinct de 1 et de -1.

1. Montrer que, pour tout entier n, on a $S_n(z) = \dfrac{1 - z^{2n+2}}{1 - z^2}$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $S_n(z) = 0$ puis la valeur de la somme de ces solutions.
3. Soit z un nombre complexe de module r strictement inférieur à 1.
   (a) Montrer que, pour tout entier n, on a $\left|S_n(z) - \dfrac{1}{1 - z^2}\right| = \dfrac{r^{2n+2}}{|1 - z^2|}$.
   (b) En déduire, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que $\left|S_n(z) - \dfrac{1}{1 - z^2}\right| \leq \dfrac{r^{2n+2}}{1 - r^2}$.
   (c) Calculer la limite de $\left|S_n(z) - \dfrac{1}{1 - z^2}\right|$ quand n tend vers $+\infty$.

C. Autour d'une fonction de la variable complexe ...

Pour tout nombre complexe distinct de 1 et de -1, on pose $f(z) = \dfrac{1}{1 - z^2}$.

1. Montrer que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
2. Résoudre l'équation $f(z) = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2z}$ (on ne cherchera pas à donner les solutions sous forme algébrique ou trigonométrique).
3. On note M le point d'affixe z. Montrer que $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow AM.BM = 1$.
4. Soit z un nombre complexe de module 1 distinct de 1 et -1. On note $z = e^{i\theta}$.
   (a) Montrer que $f(z) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\tan(\theta)}i$.
   (b) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $|f(z)| = 1$? Représenter les points M correspondants.