

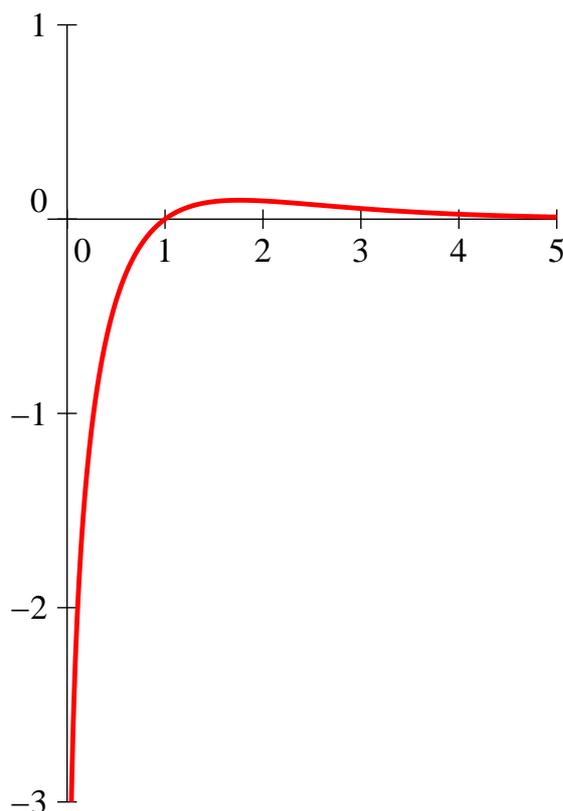
TD n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

2 décembre 2015

Exercice 1

1. Calculons donc $f'(x) = -e^{-x} \ln(x) + \frac{e^{-x}}{x}$, puis $f''(x) = e^{-x} \ln(x) - 2\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2}$. on en déduit que $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) = e^{-x} \left(\ln(x) - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - 3\ln(x) + \frac{3}{x} + 2\ln(x) \right) = \frac{x-1}{x^2} e^{-x}$. La fonction f est bien solution de l'équation.
2. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation homogène associée. Son équation caractéristique $x^2 + 3x + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et admet pour racines $x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$. Les solutions homogènes sont donc de la forme $y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-x} \ln(x)$.
3. Avec la formule précédente, la condition $f(1) = 0$ implique $\frac{A}{e} + \frac{B}{e^2} = 0$, et $y'(x) = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x} - e^{-x} \ln(x) + \frac{e^{-x}}{x}$, donc $y'(1) = -\frac{A}{e} - 2\frac{B}{e^2} + \frac{1}{e}$. La condition $f'(1) = \frac{1}{e}$ implique donc $-\frac{A}{e} - 2\frac{B}{e^2} = 0$. La solution triviale du système est $A = B = 0$, la fonction recherchée est donc la fonction f de la première question.
4. On a déjà calculé la dérivée de f plus haut, qui est du signe de $\frac{1}{x} - \ln(x) = \frac{1 - x \ln(x)}{x}$. Le numérateur a lui-même pour dérivée $-1 - \ln(x)$, qui s'annule en $\frac{1}{e}$. Ce numérateur est croissant puis décroissant, il tend vers 1 en 0 (par croissance comparée), et vers $-\infty$ en $+\infty$. La fonction f' s'annule donc une seule fois sur $]0, +\infty[$, en une valeur $\beta > \frac{1}{e}$ (en fait on sait déjà que $\beta > 1$ puisque $f'(1) = \frac{1}{e}$; et on peut constater que $\beta < e$ puisque $1 - e \ln(e) < 0$), et f' est positive sur $]0, \beta]$ et négative sur $[\beta, +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (croissance comparée). On peut donc tracer l'allure suivante :



Exercice 2

1. Non, il n'y a aucune raison que ça change!
2. Les deux fonctions sont périodiques de période $2i\pi$. En effet, $e^{z+2i\pi} = e^z \times e^{2i\pi} = e^z$, et $e^{-z-2i\pi} = e^{-z}$. Par ailleurs, $\operatorname{ch}(z + i\pi) = \frac{e^z e^{i\pi} + e^{-z} e^{-i\pi}}{2} = \frac{-e^z - e^{-z}}{2} = -\operatorname{ch}(z)$; et $\operatorname{sh}(z + i\pi) = \frac{e^z e^{i\pi} - e^{-z} e^{-i\pi}}{2} = \frac{-e^z + e^{-z}}{2} = -\operatorname{sh}(z)$.
3. (a) On sait que, quel que soit le réel b , le conjugué de e^{ib} est e^{-ib} . On en déduit, en notant $z = a + ib$, que $e^{\bar{z}} = e^{a-ib} = e^a e^{-ib} = e^a \overline{e^{ib}} = \overline{e^z}$ (le réel e^a étant son propre conjugué). Les deux formules demandées en découlent immédiatement.
- (b) C'est le même calcul que pour les fonction réelles correspondantes : $\operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = \frac{4}{4} = 1$.
- (c) Commençons par écrire $\operatorname{ch}(z)$ sous forme algébrique :

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}}{2} = \frac{e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) + e^{-x} \cos(y) - ie^{-x} \sin(y)}{2}.$$
 Ensuite, $4|\operatorname{ch}(z)|^2 = ((e^x + e^{-x}) \cos(y))^2 + ((e^x - e^{-x}) \sin(y))^2 = e^{2x} \cos^2(y) + 2 \cos^2(y) + e^{-2x} \cos^2(y) + e^{2x} \sin^2(y) - 2 \sin^2(y) + e^{-2x} \sin^2(y) = e^{2x} + e^{-2x} + 2(\cos^2(y) - \sin^2(y)) = 2 \operatorname{ch}(2x) + 2 \cos(2y)$, soit $|\operatorname{ch}(z)|^2 = \frac{\operatorname{ch}(2x) + \cos(2y)}{2}$. On calcule de même $4|\operatorname{sh}(z)|^2 = ((e^x - e^{-x}) \cos(y))^2 + ((e^x + e^{-x}) \sin(y))^2 = e^{2x} + e^{-2x} - 2 \cos^2(y) + 2 \sin^2(y) = 2 \operatorname{ch}(2x) - 2 \cos(2y)$, donc $|\operatorname{sh}(z)|^2 = \frac{\operatorname{ch}(2x) - \cos(2y)}{2}$.
- (d) En brutalisant salement : $\operatorname{ch}(z) \operatorname{ch}(z') + \operatorname{sh}(z) \operatorname{sh}(z') = \frac{(e^z + e^{-z})(e^{z'} + e^{-z'}) + (e^z - e^{-z})(e^{z'} - e^{-z'})}{4}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{z+e'} + e^{z-z'} + e^{z'-z} + e^{-z-z'} + e^{z+z'} - e^{z-z'} - e^{z'-z} + e^{-z-z'}}{4} \\
&= \frac{e^{z+z'} + e^{-z-z'}}{2} = \operatorname{ch}(z + z'). \text{ C'est quasiment la même chose pour l'autre calcul :} \\
&\operatorname{ch}(z) \operatorname{sh}(z') + \operatorname{sh}(z) \operatorname{ch}(z') \\
&= \frac{(e^z + e^{-z})(e^{z'} - e^{-z'}) + (e^z - e^{-z})(e^{z'} + e^{-z'})}{4} \\
&= \frac{e^{z+z'} - e^{z-z'} + e^{z'-z} - e^{-z-z'} + e^{z+z'} + e^{z-z'} - e^{z'-z} - e^{-z-z'}}{4} \\
&= \frac{e^{z+z'} - e^{-z-z'}}{2} = \operatorname{sh}(z + z').
\end{aligned}$$

4. (a) On sait que $\operatorname{ch}(z) = 0$ revient à dire que $e^z = -e^{-z}$. N'allez pas prétendre que c'est impossible car les exponentielles sont positives, on est dans \mathbb{C} . Notons donc $z = x + iy$, on doit donc avoir $e^x e^{iy} = -e^{-x} e^{-iy} = e^{-x} e^{-iy+i\pi}$. Les deux membres étant désormais mis sous forme exponentielle, leur égalité se résume à l'égalité des modules $e^x = e^{-x}$ et à celle des arguments $y \equiv \pi - y[2\pi]$. On en déduit $x = 0$ et $y \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $z = i\frac{\pi}{2} + ik\pi$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ (toutes les valeurs de k donnent bien des z différents ici!).

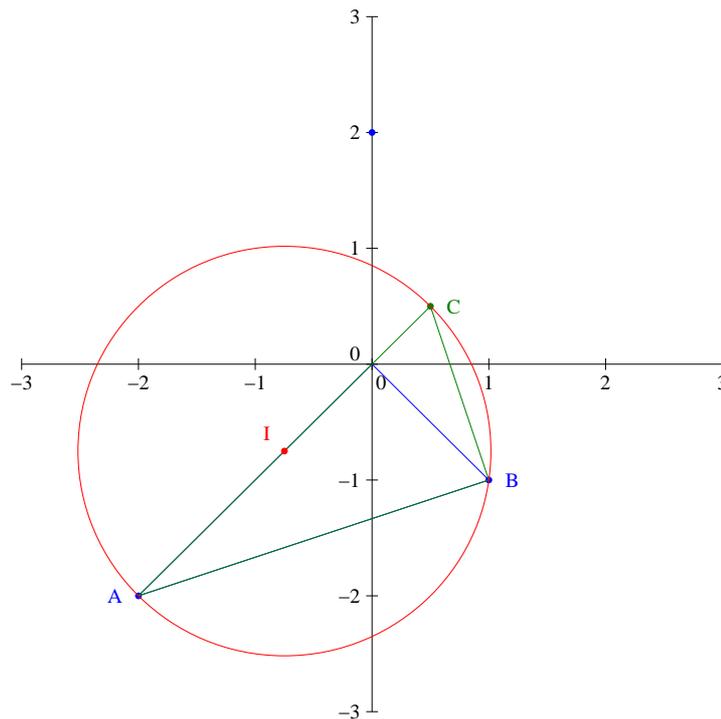
L'équation $\operatorname{sh}(z) = 0$ se traite de la même façon : $e^x e^{iy} = e^{-x} e^{-iy}$, donc $e^x = e^{-x}$ (qui donne $x = 0$), et $y \equiv -y[2\pi]$ qui implique $y \equiv 0[\pi]$. Finalement, $z = ik\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

- (b) On cherche à résoudre l'équation $e^z + e^{-z} = 2$. Commençons par poser $Z = e^z$, on doit avoir $Z + \frac{1}{Z} = 2$, soit $Z^2 - 2Z + 1 = 0$. On reconnaît une identité remarquable qui permet d'en déduire que $Z = 1$. Autrement dit, on s'est ramené à résoudre l'équation $e^z = e^x e^{iy} = 1$. Comme dans la question précédente, on utilise l'égalité des modules et des arguments pour obtenir $e^x = 1$, soit $x = 0$; et $y \equiv 0[2\pi]$. On trouve donc $2ik\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. De même, l'équation $\operatorname{ch}(z) = i$ peut s'écrire $Z^2 - 2iZ + 1 = 0$. On peut factoriser cette équation sous la forme $(Z - i)^2 + 2 = 0$, soit $(Z - i)^2 = -2 = (i\sqrt{2})^2$. On en déduit les deux solutions possibles $Z_1 = i - i\sqrt{2}$ et $Z_2 = i + i\sqrt{2}$. Commençons par traiter le cas où $e^z = Z_2$, soit $e^x e^{iy} = i + i\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{2}}$. On doit donc avoir $x = \ln(1 + \sqrt{2})$, et $y \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, soit $z = \ln(1 + \sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$. On obtient de même pour la condition $e^z = Z_1$ les solutions $z = \ln(\sqrt{2} - 1) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ (attention ici au fait que $1 - \sqrt{2} < 0$, il faut rajouter un π dans l'argument pour changer le signe).

- (c) On peut tenter la même approche qu'à la question précédente : l'équation $Z^2 - 2aZ + 1 = 0$, avec a un réel quelconque, aura pour discriminant $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$. Si $a \geq 1$, on trouve donc deux possibilités réelles pour Z , et réciproquement, si e^z est réel, il est clair que $\operatorname{ch}(z)$ le sera aussi. Par contre, si $a \in]-1, 1[$, $\Delta < 0$, et les solutions de l'équation sont de la forme $Z = \frac{2a \pm i\sqrt{1-a^2}}{2} = a \pm i\sqrt{1-a^2}$. La condition $e^z \in \mathbb{R}$ est vérifiée si $y \equiv 0[\pi]$ (en notant toujours $z = x + iy$). Dans le cas où $a \in]-1, 1[$, l'équation $e^z = a + i\sqrt{1-a^2}$ donne $e^x \cos(y) = a$ et $e^x \sin(y) = \sqrt{1-a^2}$, soit en passant au carré du module $e^{2x}(\cos^2(y) + \sin^2(y)) = a^2 + 1 - a^2 = 1$, donc $e^{2x} = 1$. On a donc nécessairement $x = 0$, et les conditions deviennent alors simplement $\cos(y) = a$ et $\sin(y) = \sqrt{1-a^2}$, soit $y \equiv \arccos(a)[2\pi]$ (l'égalité est alors automatiquement vérifiée pour le sinus, qui est toujours positif). Autrement dit, $z = i\arccos(a) + 2ik\pi$. De même, lorsque $e^z = a - i\sqrt{1-a^2}$, on trouve $x = 0$ et $y = -\arccos(a) + 2k\pi$ (seul le signe du sinus change). Si on regroupe toutes ces valeurs, on se rend compte qu'elles parcourent simplement l'axe imaginaire pur. Ce n'est pas une surprise : si $z = bi$, alors $\operatorname{ch}(z) = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = \cos(b)$, qui appartient certainement à \mathbb{R} !

Exercice 3

1. (a) Posons $z = bi$, alors $z^2 = -b^2$ et $z^3 = -b^3i$, donc $z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = -b^3i - b^2 - b^2i + 2bi + 2b + 8i$. En séparant partie réelle et partie imaginaire, z est donc solution de notre équation si $-b^2 + 2b = 0$, et $-b^3 - b^2 + 2b + 8 = 0$. La première condition donne $b = 0$ ou $b = 2$, la deuxième équation ne s'annule pas pour $b = 0$ mais s'annule pour $b = 2$ puisque $-8 - 4 + 4 + 8 = 0$, donc $z = 2i$ est solution imaginaire pure de notre équation.
- (b) On peut donc factoriser le membre de gauche de l'équation sous la forme $(z-2i)(az^2+bz+c) = az^3+(b-2ai)z^2+(c-2bi)z-2ci$. Par identification, on doit avoir $a = 1$; $b-2ai = 1+i$, donc $b = 1+3i$; $c-2bi = 2-2i$, donc $c = -4$. Reste à résoudre l'équation du second degré $z^2+(1+3i)z-4 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = (1+3i)^2+16 = 8+6i$. On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Comme $\delta^2 = a^2-b^2+2abi$, on trouve les deux conditions $a^2-b^2 = 8$ et $2ab = 6$. On ajoute l'équation aux modules $|\delta|^2 = a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{64+36} = 10$. En ajoutant et soustrayant la première et la dernière équations obtenues, on trouve $2a^2 = 18$ et $2b^2 = 2$, soit $a = \pm 3$ et $b = \pm 1$. Comme ab est positif, a et b doivent être de même signe et on peut prendre $\delta = 3+i$. On en déduit les solutions de notre équation du second degré : $z_1 = \frac{-1-3i+3+i}{2} = 1-i$ et $z_2 = \frac{-1-3-3-i}{2} = -2-2i$. Les solutions de l'équation initiale sont donc données par $\mathcal{S} = 2i, 1-i, -2-2i$.
- (c)



2. Par un calcul de distances, on va utiliser ce bon vieux théorème de Pythagore (ou plutôt sa réciproque, en l'occurrence). On calcule donc $OA = |-2-2i| = \sqrt{8}$, $OB = |1-i| = \sqrt{2}$, et $AB = |1-i - (-2-2i)| = |3+i| = \sqrt{10}$. Constatant aisément que $OA^2 + OB^2 = 10 = AB^2$, on en déduit que OAB est rectangle en O . Autre possibilité, calculer des arguments : comme $z_A = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$, on a $\arg(z_A) = -\frac{3\pi}{4}$. De même, $z_B = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$, donc $\arg(z_B) = -\frac{\pi}{4}$. On en déduit que $(\vec{OA}, \vec{OB}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que le triangle OAB est rectangle en O .

3. (a) On a en fait déjà effectué les calculs nécessaires à la question précédente. La similitude f vérifie $f(O) = O$ et $f(A) = B$, donc son rapport est $\frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$. Son angle est l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg(z_B) - \arg(z_A) = \frac{\pi}{2}$. L'application f est donc la composée de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et de l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$. si on veut en donner une expression analytique, on a donc $f(z) = \frac{1}{2}iz$ (qu'on peut aussi obtenir par la résolution d'un système).
- (b) Un calcul idiot suffit : $f \circ f(z) = -\frac{1}{4}z$, donc $f \circ f$ est simplement l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{4}$.
- (c) D'après la question précédente, $z_C = -\frac{1}{4}z_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. On peut alors calculer par exemple $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{3 + i} = \frac{1}{2} \frac{i(3 + i)}{3 + i} = -\frac{i}{2}$. ce nombre étant imaginaire pur, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en B .
4. (a) Donnons par exemple une équation cartésienne : $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$, soit $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{50}{16}$, soit $x^2 + \frac{3}{2}x + y^2 + \frac{3}{2}y - 2 = 0$.
- (b) Vérifions donc que leurs coordonnées vérifient l'équation : $(-2)^2 + \frac{3}{2} \times (-2) + (-2)^2 + \frac{3}{2} \times (-2) - 2 = 4 - 3 + 4 - 3 - 2 = 0$, c'est bon pour A ; $1 + \frac{3}{2} + 1 - \frac{3}{2} - 2 = 0$, c'est bon pour B ; $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 = 0$, c'est bon également pour C .
- (c) Il suffit de constater que $z_I = \frac{z_A + z_C}{2}$ pour en déduire que I est le milieu de $[AC]$. Or, dans le triangle rectangle ABC , le milieu I de l'hypoténuse est également le centre du cercle circonscrit au triangle. Il est donc tout à fait normal que les trois points A , B et C soient situés à égale distance du point I , et un seul calcul de distance au lieu de trois aurait pu suffire.

Exercice 4

A. Changement de fonction inconnue.

- On cherche donc une solution à l'équation $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ de la forme $y_0(x) = x^\alpha$. On a alors $y_0'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, puis $y_0''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. En factorisant tout par x^α , la fonction y_0 est donc solution de notre équation si $\alpha(\alpha-1) + 3\alpha + 1 = 0$, soit $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$. L'unique solution de cette équation est $\alpha = -1$, qui donne $y_0(x) = \frac{1}{x}$.
- On pose donc $y(x) = \frac{z(x)}{x}$, et on dérive : $y'(x) = \frac{xz'(x) - z(x)}{x^2}$, puis $y''(x) = \frac{x^3 z''(x) - 2x^2 z'(x) + 2xz(x)}{x^4} = \frac{x^2 z''(x) - 2xz'(x) + 2z(x)}{x^3}$. On obtient ensuite $x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{x^2 z'' - 2xz' + 2z + 3xz' - 3z + z}{x} = xz''(x) + z'(x)$. La fonction z' est donc bien solution de l'équation $xz'(x) + z(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)$.
- On normalise l'équation pour l'écrire sous la forme $f' + \frac{1}{x}f = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$. L'équation homogène

correspondante a pour solutions les fonctions $f_h : x \mapsto Ke^{-\ln(x)} = \frac{K}{x}$. Pour déterminer une solution particulière, on va simplement procéder par variation de la constante, en posant $f_p(x) = \frac{K(x)}{x}$, donc $f_p'(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$. On obtient alors la condition $\frac{K'(x)}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$, soit $K'(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$. On choisit par exemple $K(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{\ln(x)}{2}$, soit $f_p(x) = \frac{x}{4} + \frac{\ln(x)}{2x}$. Les solutions générales de notre équation sont donc les fonctions $f : x \mapsto \frac{x}{4} + \frac{\ln(x)}{2x} + \frac{K}{x} = \frac{x}{4} + \frac{\ln(x) + L}{2x}$, quitte à multiplier la constante par 2.

4. En reprenant les notations précédentes, $z'(x) = \frac{x}{4} + \frac{\ln(x) + L}{2x}$, donc $z(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{\ln^2(x)}{4} + K \ln(x) + B$ (finalement, on reprend la constante précédente!). Il ne reste plus qu'à conclure que les solutions de l'équation (F) sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{x}{8} + \frac{\ln^2(x)}{4x} + \frac{K \ln(x)}{x} + \frac{B}{x}$, où K et B sont deux constantes réelles.

B. Changement de variable.

- En posant $y(x) = w(\ln(x))$, on aura $y'(x) = \frac{w'(\ln(x))}{x}$, puis $y''(x) = \frac{w''(\ln(x)) - w'(\ln(x))}{x^2}$. L'équation (F) peut alors s'écrire $w''(\ln(x)) - w'(\ln(x)) + 3w'(\ln(x)) + w(\ln(x)) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}$, soit en posant $t = \ln(x)$, et donc $x = e^t : w''(t) + 2w'(t) + w(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \text{ch}(t)$.
- Commençons par l'équation homogène : l'équation caractéristique associée $x^2 + 2x + 1 = 0$ admet pour racine double -1 . Les solutions homogènes sont donc les fonctions $w_h(t) = (At + B)e^{-t}$. Reste à déterminer une solution particulière. On peut pour cela procéder par superposition. Commençons par chercher une solution de l'équation $w'' + 2w' + w = \frac{e^t}{2}$ sous la forme $w_{p_1}(t) = Ke^t$. Les dérivées étant identiques, on trouve la condition $4Ke^t = \frac{e^t}{2}$, soit $K = \frac{1}{8}$ et $w_{p_1}(t) = \frac{e^t}{8}$. Cherchons désormais une solution particulière à l'équation $w'' + 2w' + w = \frac{e^{-t}}{2}$ sous la forme $w_{p_2}(t) = (at^2 + bt + c)e^{-t}$ (on est obligés d'augmenter le degré de 2 puisque -1 est racine double de l'équation caractéristique). On calcule $w'_{p_2}(t) = (-at^2 + (2a - b)t + b - c)e^{-t}$, puis $w''_{p_2}(t) = (at^2 + (b - 4a)t + 2a - 2b + c)e^{-t}$, et enfin $w''_{p_2}(t) + 2w'_{p_2}(t) + w_{p_2}(t) = 2ae^{-t}$ (tout le reste se simplifie). On a donc la simple condition $2a = \frac{1}{2}$ qui permet de choisir $a = \frac{1}{4}$, soit $w_{p_2}(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{4}$. Il ne reste plus qu'à conclure : les solutions de l'équation (G) sont les fonctions $w : t \mapsto (At + B)e^{-t} + \frac{e^t}{8} + \frac{t^2 e^{-t}}{4}$.
- Il suffit de remplacer t par $\ln(x)$ pour retrouver $y(x) = \frac{A \ln(x) + B}{x} + \frac{x}{8} + \frac{\ln^2(x)}{4x}$, exactement les mêmes formules que par l'autre méthode!