TD n°4 : révisions pour le DS3

PTSI B Lycée Eiffel

2 décembre 2015

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{-x}\ln(x)$ est une solution particulière de l'équation.
2. Résoudre l'équation.
3. Déterminer sa solution vérifiant $f(1) = 0$ et $f'(1) = \dfrac{1}{e}$.
4. Étudier la solution obtenue à la question précédente, et tracer une allure soignée de sa courbe représentative.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à étendre les fonctions ch et sh au plan complexe en posant, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{ch}(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, et $\mathrm{sh}(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$.

1. La parité des fonctions ch et sh est-elle modifiée par ce prolongement au plan complexe ?
2. Vérifier que, sur $\mathbb{C}$, ch et sh sont des fonctions périodiques (on en précisera une période). Calculer $\mathrm{ch}(z + i\pi)$ et $\mathrm{sh}(z + i\pi)$ en fonction de $\mathrm{ch}(z)$ et $\mathrm{sh}(z)$.
3. Quelques formules faisant intervenir les fonctions ch et sh :
   (a) Démontrer que, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{ch}(\bar{z}) = \overline{\mathrm{ch}(z)}$, et $\mathrm{sh}(\bar{z}) = \overline{\mathrm{sh}(z)}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$.
   (c) En posant $z = x + iy$, montrer que $|\mathrm{ch}(z)|^2 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(2x) + \cos(2y))$. Démontrer une formule similaire pour $|\mathrm{sh}^2(z)|$.
   (d) Démontrer les formules d'addition $\mathrm{ch}(z + z') = \mathrm{ch}(z)\,\mathrm{ch}(z') + \mathrm{sh}(z)\,\mathrm{sh}(z')$, et $\mathrm{sh}(z + z') = \mathrm{ch}(z)\,\mathrm{sh}(z') + \mathrm{sh}(z)\,\mathrm{ch}(z')$.
4. Quelques équations faisant intervenir ch et sh :
   (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\mathrm{ch}(z) = 0$ et $\mathrm{sh}(z) = 0$.
   (b) Déterminer tous les nombres complexes vérifiant $\mathrm{ch}(z) = 1$, puis ceux pour lesquels $\mathrm{ch}(z) = i$.
   (c) Plus généralement, déterminer tous les nombres complexes pour lesquels $\mathrm{ch}(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. On considère l'équation $z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = 0$.
   (a) Déterminer une solution imaginaire pure de cette équation.

(b) En déduire toutes les solutions de l'équation.

(c) Placer les images des solutions obtenues dans le plan complexe. On complètera la figure au fur et à mesure de l'exercice, elle doit contenir à la fin les points A, B, C et I ainsi que le cercle $\mathcal{C}$.

2. On note pour toute la suite de l'exercice A le point d'affixe $1-i$ et B celui d'affixe $2-2i$ dans le plan complexe. Vérifier de deux manières que le triangle OAB est rectangle (en notant bien sûr O l'origine du repère) : par un calcul de distances, et par un calcul d'arguments.

3. (a) Déterminer l'unique isométrie directe f de centre O vérifiant $f(A) = B$, préciser son angle et son rapport.

   (b) Caractériser l'application $f \circ f$.

   (c) On note $C = f \circ f(A)$. Vérifier que ABC est un triangle rectangle (méthode au choix, cette fois-ci).

4. On note I le point d'affixe $-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i$.

   (a) Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon $\frac{5}{\sqrt{8}}$.

   (b) Vérifier que A, B et C appartient tous les trois à ce cercle (si vous n'avez pas obtenu l'affixe du point C, faites le calcul au moins pour A et pour B).

   (c) Que représente I pour le segment $[BC]$? Comment le résultat de la question précédente auraitèil pu être démontré sans calculs (exploitez ce qui précède et vos souvenirs de géométrie des années antérieures) ?

Exercice 4

On se propose dans cet exercice de résoudre de deux façons différentes l'équation différentielle $(F) : x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Les deux parties de l'exercice sont donc indépendantes.

A. Changement de fonction inconnue.

1. Montrer que l'équation homogène associée à (F) admet une solution de la forme $y_0(x) = x^\alpha$, pour une valeur de α à déterminer.
2. En posant $y(x) = x^\alpha z(x)$, montrer que y est solution de (F) si et seulement si z' est solution de l'équation du premier ordre $xf' + f = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.
3. Résoudre l'équation du premier ordre obtenue à la question précédente sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
4. En déduire les solutions de l'équation (F).

B. Changement de variable.

On souhaite résoudre l'équation (F) en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$. On pose donc, pour une fonction y solution de (F), $y(x) = w(\ln(x))$.

1. Montrer que w est solution de l'équation différentielle $(G) : w''(t) + 2w'(t) + w(t) = \mathrm{ch}(t)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (G).
3. En déduire les solutions de l'équation (F).