TD n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 novembre 2015

Exercice 1

1. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(i+j)^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i^2+2ij+j^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}+j^2(j+1)+j^3 = \sum_{j=1}^{n}\frac{7}{3}j^3+\frac{3}{2}j^2+\frac{1}{6}j = \frac{7n^2(n+1)^2}{12}+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{12} = \frac{n(n+1)}{12}(7n(n+1)+3(2n+1)+1) = \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}$. Le dernier facteur n'a pas de racines simples, autant le laisser comme ça.

2. Le plus simple est d'utiliser les transformations somme-produit $\cos(p)\cos(q) = \frac{1}{2}(\cos(p+q)+\cos(p-q))$. On obtient alors l'équation équivalente (en multipliant tout par 2) $\cos(2x)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$, soit $\cos(2x) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On trouve donc $2x \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi]$, soit $x\equiv\pm\frac{\pi}{6}[\pi]$.

   Autre possibilité : utiliser brutalement les formules d'addition. On a $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\sin(x)\right) = \frac{3}{4}\cos^2(x)-\frac{1}{4}\sin^2(x) = \cos^2(x)-\frac{1}{4}$. On trouve donc $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$, soit $\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui nous fait retomber sur les quatre valeurs (modulo 2π) d'angle trouvées par la première méthode : $\pm\frac{\pi}{6}$ et $\pm\frac{5\pi}{6}$.

3. Notons donc P_n la propriété : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$. Au rang 2, on calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{4} = 54$, et $\frac{3\times 2}{2\times 2+1} = \frac{6}{5} < \frac{5}{4}$, donc P_2 est bien vraie. Supposons donc P_n vraie, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$ par hypothèse de récurrence. Il suffit donc de prouver que $\frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$ pour démontrer P_{n+1}. Or, $\frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{3n+3}{2n+3} = \frac{3n(n+1)^2(2n+3)+(2n+1)(2n+3)-(n+1)^2(2n+1)(3n+3)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}$. Contentons-nous de développer le numérateur $N = (6n^2+9n)(n^2+2n+1)+(4n^2+8n+3)-(n^2+2n+1)(6n^2+9n+3) = 6n^4+21n^3+24n^2+9n+4n^2+8n+3-(6n^4+21n^3+27n^2+15n+3) = n^2+2n \geq 0$. Ceci prouve bien que P_{n+1} est vérifiée et, d'après le principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies quand $n\geq 2$.

4. (a) Les deux fonctions sont sans problème définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. D'un côté, $f'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)} = \frac{1}{2}\times\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)}$ en utilisant la relation $\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x) = 1$. De l'autre,

posons $h(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$, et calculons d'abord $h'(x)=\dfrac{\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x))-\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}=\dfrac{\mathrm{ch}(x)+1}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}=\dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}$. Ensuite, on calcule $g'(x)=\dfrac{h'(x)}{1+h(x)^2}=\dfrac{\frac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}}{1+\dfrac{\mathrm{sh}^2(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2}}=\dfrac{1+\mathrm{ch}(x)}{(1+\mathrm{ch}(x))^2+\mathrm{sh}^2(x)}=\dfrac{1+\mathrm{ch}(x)}{1+2\,\mathrm{ch}(x)+\mathrm{ch}^2(x)+\mathrm{ch}^2(x)-1}=\dfrac{1+\mathrm{ch}(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)(1+\mathrm{ch}(x))}=\dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(x)}$. Grosse surprise, on constate que $f'=g'$, ce qui prouve que f et g sont égales à une constate près. Il ne reste plus qu'à calculer $f(0)=\dfrac{1}{2}\arctan(0)=0$, et $g(0)=\arctan(0)=0$, pour conclure que $f=g$.

(b) Commençons par calculer $e^{\frac{\ln(3)}{2}}=\sqrt{3}$. Ensuite, $\mathrm{ch}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, et $\mathrm{sh}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(c) On en déduit donc que $f\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\pi}{12}$. Mais alors $\dfrac{\pi}{12}=\arctan\left(g\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)\right)$, donc $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\mathrm{sh}(\frac{\ln(3)}{2})}{1+\mathrm{ch}(\frac{\ln(3)}{2})}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$.

Exercice 2

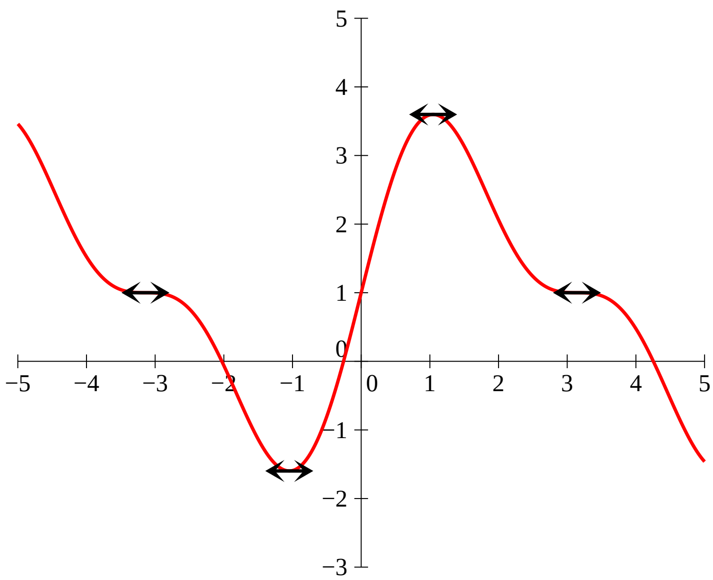
1. On sait que $S_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et on calcule sans trop se fatiguer (et sans utiliser la formule) : $S_1=1$, $S_2=1+4=5$, $S_3=1+4+9=14$, $S_4=S_3+16=30$ et $S_5=S_4+25=55$.
2. En se fatiguant un peu plus, $T_1=1$, $T_2=1+16=17$, $T_3=17+9^2=17+81=98$, $T_4=98+16^2=98+256=354$ et $T_5=354+25^2=354+625=979$. On en déduit que $u_1=1$, $u_2=\dfrac{17}{5}$, $u_3=\dfrac{98}{14}=7$, $u_4=\dfrac{354}{30}=\dfrac{59}{5}$ et $u_5=\dfrac{979}{55}=\dfrac{89}{5}$. Encore une petite série de calculs : $v_1=5\times\dfrac{12}{5}=12$, $v_2=5\times\dfrac{18}{5}=18$, $v_3=24$ et $v_4=30$.
3. Il semblerait bien que v_n soit une suite arithmétique de raison 6, et plus précisément que $v_n=6(n+1)$. On peut en déduire u_n : en partant de u_1, on a la relation $u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+\cdots+(u_2-u_1)+u_1$ (on peut écrire les choses joliment avec une somme), soit $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{v_k}{5}+1=1+\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n-1}6(k+1)=1+\frac{6}{5}\sum_{k=2}^{n}k=1=\frac{6}{5}\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)=\frac{3n(n+1)-1}{5}=\frac{3n^2+3n-1}{5}$. On en déduit que $T_n=S_n\times u_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.
4. Soyons fous et démontrons par récurrence la propriété $P_n : T_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$. Au rang 1, la somme se réduit à un seul terme égal à 1, et le quotient de droite vaut $\dfrac{1\times2\times3\times5}{30}=1$, ça marche. Supposons la formule vraie au rang n, alors $T_{n+1}=T_n+(n+1)^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+(n+1)^4=\dfrac{n+1}{30}\times((2n^2+n)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^3)=\dfrac{(n+1)}{30}\times(6n^4+9n^3+n^2-n+30n^3+90n^2+90n+30)=\dfrac{n+1}{30}\times(6n^4+39n^3+91n^2+89n+30)$. Or, on a $(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2+3(n+1)-1)=(2n^2+7n+6)(3n^2+9n+5)=6n^4+39n^3+91n^2+89n+30$. Quelle coïncidence extraordinaire ! On a donc $T_{n+1}=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3(n+1)^2+3(n+1)-1)}{30}$, c'est-à-dire exactement la propriété P_{n+1}. Il ne reste plus qu'à conclure en invoquant le principe de récurrence.

Exercice 3

1. Calculons donc : $f(0) = 1+0+0 = 1$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1+1+\frac{\sqrt{3}}{2} = 2+\frac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1+\sqrt{2}+1 = 2+\sqrt{2}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2} = 1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+2+0 = 3$.
2. La fonction est 2π-périodique mais n'a pas de parité intéressante, on va donc l'étudier sur $[-\pi, \pi]$.
3. Calculond derechef : $f'(x) = 2\cos(x)+2\cos(2x) = 2(2\cos^2(x)+\cos(x)-1)$. Posons $X = \cos(x)$ et étudions le signe de $2X^2+X-1$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et s'annule pour $X_1 = \frac{-1-3}{2} = -1$, et $X_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{1}{2}$. Sur notre intervalle d'étude, la dérivée s'annule donc en $\pm\pi$ et en $\pm\frac{\pi}{3}$, et elle est négative quand $\cos(x)$ se situe entre -1 et $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. On a déjà calculé $f(\pm\pi) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1+\frac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 3.6$, il nous faut aussi $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2} = 1-\frac{3\sqrt{3}}{2} \simeq -1.6$. On peut dresser le tableau suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
f	1	$\searrow$	$1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	1

4. Il faut sélectionner un intervalle I sur lequel f est strictement monotone, mais si on le veut le plus grand possible, il faudra choisir un intervalle sur lequel elle est décroissante, par exemple $I = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, et on aura $J = \left[1-\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$.
5. Attention à ne pas oublier la tangente horizontale en $\pm\pi$, même s'il n'y a pas d'extremum local à cet endroite. On peut bien sûr essayer de respecter approximativement toutes les valeurs calculées à la première question.



Exercice 4

1. Posons donc $z(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, et dérivons z : $z'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$. La fonction z est constante sur $]0, +\infty[$, de valeur égale à $f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

2. (a) Je ne ferai même pas de dessin clair : par définition, $\int_0^x f(t)\ dt$ est l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et la droite verticale située à l'abscisse x. De même, $\int_0^{f(x)} g(t)\ dt$ est l'aire située entre la courbe de g etc. Mais on sait bien que la courbe de g est symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. Quitte à inverser le rôle des deux axes, on peut donc visualiser la courbe de g dans le même repère que celle de f, et la deuxième intégrale correspond alors exactement à l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe des ordonnées et la droite horizontale située à ordonnée $f(x)$. Quand on additionne les deux aires, on obtient exactement l'aire du rectangle constitué par les deux axes et les deux droites (l'une verticale, l'autre horizontale) précédemment décrites. Ce rectangle est de largeur x et de hauteur $f(x)$, il a donc pour aire $xf(x)$, ce qui prouve notre formule.

   (b) Par définition, $\int_0^x f(t)\ dt + \int_0^{f(x)} g(t)\ dt = F(x) + G(f(x))$ (on prend les primitives s'annulant en 0 pour simplifier le calcul).

   (c) Pour faire réapparaitre les fonctions f et g, dérivons donc $H(x) = F(x) + G(f(x))$, on obtient $H'(x) = f(x) + f'(x)g(f(x)) = f(x) + xf'(x)$ puisque, par définition de la réciproque, $g(f(x)) = x$. Or, la formule obtenue pour $H'(x)$ est la même que celle de la dérivée de $xf(x)$. On en déduit que $H(x) = xf(x) + k$. Reste à constater que $H(0) = F(0) + G(f(0)) = F(0) + G(0) = 0$ (puisque les primitives s'annulent en 0) pour conclure que $H(x) = xf(x)$.

3. (a) On peut effectuer la division euclidienne, ou procéder par identification : $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + (\sqrt{2}a + b)x^3 + (a + b\sqrt{2} + c)x^2 + (b + c\sqrt{2})x + c$. Par identification, on doit donc avoir $a = 1$; $\sqrt{2}a + b = 0$, soit $b = -\sqrt{2}$; $a + b\sqrt{2} + c = 0$, soit $c = -1 + 2 = 1$; $b + c\sqrt{2} = 0$ ce qui est vrai ; et $c = 1$ ce qui est vrai aussi. Finalement, $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

   (b) Comme il n'y a pas de racines pour le dénominateur, le plus rapide est sûrement de faire une identification, ou d'être astucieux ! Constatons par exemple que $\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1 - x^2 + \sqrt{2}x - 1}{x^4 + 1} = \frac{2\sqrt{2}x}{x^4 + 1}$. Il suffit de tout multiplier par $\frac{x}{2\sqrt{2}}$ pour obtenir $\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{x}{2\sqrt{2}(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} - \frac{x}{2\sqrt{2}(x^2 + \sqrt{2}x + 1)}$. Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, $b = d = 0$, et $c = -a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

   (c) Calculons donc $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\ dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\ dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1)]_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}}\ dx = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{2}(x - \frac{\sqrt{2}}{2}))^2 + 1}\ dx = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x - 1)\right]_0^1 = \frac{\ln(2 - \sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi}{4}$.

   On fait le même calcul (ou presque) pour la deuxième moitié : $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\ dx =$

$\frac{1}{2}[\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)]_0^1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\ dx = \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2} - [\arctan(\sqrt{2}x+1)]_0^1 = \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2} - \arctan(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}$.
On regroupe maintenant les deux résultats pour obtenir $J = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(2-\sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2}-1) + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2+\sqrt{2})}{2} + \arctan(\sqrt{2}-1) - \frac{\pi}{4}\right)$. Or, $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ (en multipliant par la quantité conjuguée), donc $\arctan(\sqrt{2}-1) + \arctan(1+\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, $\ln(2+\sqrt{2}) - \ln(2-\sqrt{2}) = \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(3+2\sqrt{2})$. En regroupant tout, on obtient finalement (ouf !) : $J = \frac{\pi - \ln(3+2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}$.

4. La fonction tangente étant continue strictement croissante et positive sur l'intervalle considéré, f aussi, et elle est donc bijective vers $[0,1]$ (puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = \sqrt{1} = 1$). Si $y = \sqrt{\tan(x)}$, alors $x = \arctan(y^2)$, donc $g(x) = \arctan(x^2)$ (même pas de piège !).

5. On souhaite donc calculer $\int_0^1 \arctan(x^2)\ dx$. Procédons par IPP en posant $u(x) = \arctan(x^2)$, donc $u'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$, et $v'(x) = 1$ qui donne $v(x) = x$. On obtient alors $\int_0^1 g(x)\ dx = [x\arctan(x^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}\ dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi - \ln(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\ln(3+2\sqrt{2}) + \pi(1-\sqrt{2})}{4}$ (on a utilisé le résultat du calcul de J).

   Il ne reste plus, en appliquant la question 2 avec $x = \frac{\pi}{4}$, qu'à constater que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\ dt + \int_0^1 g - t)\ dt = \frac{\pi}{4}f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, donc $I = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 g(t)\ dt = 2J = \frac{\pi - \ln(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}$.