TD n°3 : révisions pour le DS2

PTSI B Lycée Eiffel

5 novembre 2015

Exercice 1

Un peu de calculs divers pour commencer en douceur :

1. Calculer et factoriser $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}(i+j)^2$.
2. Résoudre l'équation $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.
3. Démontrer par récurrence que, $\forall n\geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}>\frac{3n}{2n+1}$.
4. On définit deux fonctions f et g par $f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x))$, et $g(x)=\arctan\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$.
   (a) Démontrer à l'aide d'un calcule de dérivée que, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)$.
   (b) Donner une expression simple de $\mathrm{ch}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)$ et de $\mathrm{sh}\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)$.
   (c) En déduire la valeur de $f\left(\dfrac{\ln(3)}{2}\right)$. En exploitant le fait que $f=g$, de quel angle peut-on déduire la tangente ?

Exercice 2

Pour tout entier $n\geq 1$, on note $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$, et $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$. On note également $u_n=\dfrac{T_n}{S_n}$, et $v_n=5(u_{n+1}-u_n)$.

1. Rappeler la formule vue en cours pour S_n, et donner les valeurs de S_n pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 5.
2. Donner la valeur de T_n pour ces mêmes entiers (évitez de vous planter en calculant 5^4), et en déduire les valeurs correspondantes de u_n (on simplifiera les fractions obtenues si possible) et v_n.
3. Deviner la valeur de v_n en fonction de n (on ne cherche pas à démontrer cette formule pour l'instant), et en déduire celle de u_n, puis celle de T_n (en utilisant bien sûr à nouveau la formule du cours pour S_n).
4. Démontrer par récurrence que $T_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ (question indépendante des précédentes, je donne la formule pour que ceux qui ont bloqué avant puissent tenter de faire la récurrence).

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + 2\sin(x) + \sin(2x)$.

1. Calculer les images par f de 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer un intervalle d'étude intelligent pour la fonction f.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f, et étudier les variations de f (on dressera un tableau de variations complet).
4. Déterminer deux intervalles I et J les plus grands possibles tels que f effectue une bijection de I sur J.
5. Tracer une allure soignée de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 4

Le but de ce dernier exercice est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}\, dx$.

1. Démontrer que, $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (on pourra par exemple passer par un calcul de dérivée).
2. On considère une fonction f définie et strictement monotone sur $[0, a]$, et vérifiant $f(0) = 0$, et on note g sa réciproque.
   (a) On veut prouver que, $\forall x \in [0, a]$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} g(t)\, dt = xf(x)$. Faire un dessin clair expliquant ce résultat à l'aide de calculs d'aires.
   (b) Exprimer $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} g(t)\, dt$ à l'aide de primitives F et G des fonctions f et g.
   (c) Redémontrer rigoureusement la formule souhaitée.
3. On veut calculer dans cette question $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$.
   (a) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $x^4 + 1 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)P(x)$.
   (b) Effectuer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{x^2}{x^4+1}$, sous la forme $\dfrac{ax+b}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \dfrac{cx+d}{P(x)}$.
   (c) Calculer l'intégrale J, et mettre le résultat sous la forme la plus simple possible (en utilisant le résultat de la question 1).
4. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est bijective de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ vers un intervalle à préciser, et donner l'expression de sa réciproque g.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$ et appliquer le résultat de la question 2 pour en déduire la valeur de I.