TD n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 septembre 2015

Exercice 1

1. Cette inéquation n'a de sens que si $x \geq 0$. On peut alors poser $X = \sqrt{x}$ pour obtenir l'inéquation $X^2 - 4X + 3 \geq 0$. Le trinôme du membre de gauche a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $X_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$. Il est donc positif si $X \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$. On en déduit, en ne gardant que les valeurs positives, que $\mathcal{S} = [0; 1] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$.
2. Pas d'autre choix ici que de faire un tableau de signes pour $|x^2 - 1| - |x - 2|$:

x		-1		1		2	
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1		x^2-1
$\lvert x-2\rvert$	$2-x$		$2-x$		$2-x$	0	$x-2$
$\lvert x^2-1\rvert - \lvert x-2\rvert$	x^2+x-3	-3	$-x^2+x-1$	-1	x^2+x-3	3	x^2-x+1

Restent à résoudre pas moins de quatre équations. Sur $]-\infty; -1]$, $x^2 + x - 3 = -1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ (pas valable), et $x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ (valable). Sur $[-1; 1]$, on obtient $-x^2 + x0 = 0$, soit $x = 0$ (valable) ou $x = 1$ (valable aussi). Sur $[1; 2]$, on a $x^2 + x - 2 = 0$, équation déjà résolue tout à l'heure, qui donne pour racines -2 (non valable sur cet intervalle) et 1 (valable mais déjà obtenue sur l'intervalle précédent). Enfin, sur $[2; +\infty[$, on a $x^2 - x + 2 = 0$, qui a un discriminant négatif. On déduit de tout cela que $\mathcal{S} = \{-2; 0; 1\}$.
3. Cette équation du troisième degré a pour racine évidente -1 puisque $2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 2 = -2 - 3 + 3 + 2 = 0$. On peut donc la factoriser sous la forme $(x+1)(ax^2 + bx + c) = 0$. En développant, on a $(x+1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$, dont on déduit par identification que $a = 2$, $b = -5$ et $c = 2$. Reste à résoudre l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$, et qui admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$. Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{-1; \dfrac{1}{2}; 2\right\}$.
4. Commençons par constater que l'inéquation n'a pas de sens si $x^2 + 2x = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = 0$ ou $x = -2$. Pour toutes les autres valeurs de x, on peut supprimer les ln pour obtenir $|x^2 + 2x| < 3$, c'est-à-dire $-3 < x^2 + 2x < 3$. L'inéquation de gauche revient à dire que $x^2 + 2x + 3 > 0$, ce qui est toujours vrai (le discriminant est négatif), celle de droite donne $x^2 + 2x - 3 < 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$. L'inéquation est donc vérifiée si $x \in]-3; 1[$, et concernant l'inéquation initiale, on a $\mathcal{S} =]-3; -2[\cup]-2; 0[\cup]0; 1[$.

Exercice 2

1. La fonction f n'est pas définie si $x^2 - x - 2 = 0$, équation de discriminant $\Delta = 1 + 9$, et admettant pour solutions $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$.

2. Commençons par les images : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left|\dfrac{\frac{5}{2}}{-\frac{9}{4}}\right| = \dfrac{10}{9}$; et $f(-\sqrt{2}) = \left|\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2}-1$. Pour les antécédents de 1, il faut résoudre l'équation $|x+2| = |x^2-x-2|$, ce qui donne deux possibilités : soit $-x-2 = x^2-x-2$, donc $x = 0$; soit $x+2 = x^2-x-2$, donc x^2-2x-4, qui a pour discriminant $\Delta = 4+16 = 20$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{20}}{2} = 1-\sqrt{5}$ et $x_2 = 1+\sqrt{5}$. Le réel 1 a donc trois antécédents par f : $1-\sqrt{5}$, 0 et $1+\sqrt{5}$. Pour -2, aucun calcul à faire, il ne peut pas avoir d'antécédents puisque f ne prend que des valeurs positives. Pour 3, on utilise la même méthode que pour 1 : soit $x+2 = 3x^2-3x-6$, donc $3x^2-4x-8 = 0$, discriminant $\Delta = 16+96 = 112 = 7 \times 16$, racines $x_3 = \dfrac{4-\sqrt{116}}{6} = \dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}$ et $x_4 = \dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$; soit $-x-2 = 3x^2-3x-6$, donc $3x^2-2x-4 = 0$, discriminant $\Delta = 4+48 = 52 = 4 \times 13$, racines $x_5 = \dfrac{2-\sqrt{52}}{6} = \dfrac{1-\sqrt{13}}{3}$ et $x_6 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{3}$. Le réel 3 a donc quatre antécédents qu'on n'a pas très envie de recopier.

3. On se ramène à l'inéquation $|x+2| - |x^2-x-2| \geq 0$, et on peut par exemple faire un tableau :

x	$-\infty$ -2	-2 -1	-1 2	2 $+\infty$
$\|x+2\|$	$-x-2$ 0	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$\|x^2-x-2\|$	x^2-x-2	x^2-x-2 0	$-x^2+x+2$ 0	x^2-x-2
$\|x+2\| - \|x^2-x-2\|$	$-x^2$	$-x^2+2x+4$	x^2	$-x^2+2x+4$

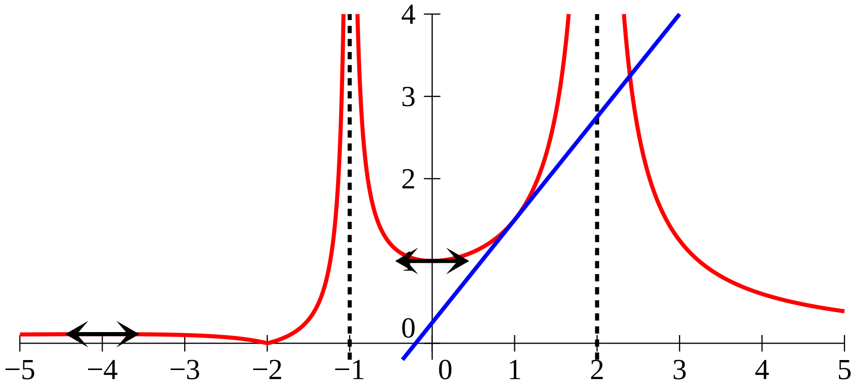
L'inéquation n'est jamais vérifiée sur $]-\infty, -2]$, et elle l'est toujours sur $]-1, 2[$. Sur les deux intervalles restants, $-x^2+2x+4$ est positif entre ses racines, donc sur $[1-\sqrt{5}, -1[$ (le nombre $1-\sqrt{5}$ étant compris entre -2 et -1) et sur $]2, 1+\sqrt{5}]$. Conclusion : $\mathcal{S} = [1-\sqrt{5}, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, 1+\sqrt{5}] = [1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}]\backslash\{-1, 2\}$.

4. Le quotient $\dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ a pour limite 0 en $\pm\infty$ (quotient des termes de plus haut degré), donc f aussi. En -1 et en 2, le dénominateur s'annule mais pas le numérateur, ce qui assure que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ (la valeur absolu étant de toute façon positive).

5. Posons $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ et étudions les variations et le signe de g. La fonction g est dérivale sur $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{x^2-x-2-(2x-1)(x+2)}{(x-2-x-2)^2} = \dfrac{-x^2-4x}{(x^2-x-2)^2} = \dfrac{x(-x-4)}{(x^2-x-2)^2}$. On sait déjà que $g(0) = -1$ et $g(-4) = \dfrac{-2}{18} = -\dfrac{1}{9}$. De plus, la fonction g change de signe en -2, -1 et 2, elle est négative sur $]-\infty, -2]$ et sur $]-1, 2[$ et positive sur $[-2, -1[$ et sur $]2, +\infty[$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	$+\infty$		-4		-2		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
g	0	$\searrow$	$-\frac{1}{9}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

6. Pour $x = 1$, on calcule $f(1) = -g(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f'(1) = -g'(1) = \dfrac{5}{4}$ (f est opposée à g sur tout l'intervalle $]-1,2[$), l'équation recherchée est donc $y = \dfrac{5}{4}(x-1) + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{4}$.
7. Et une belle courbe :

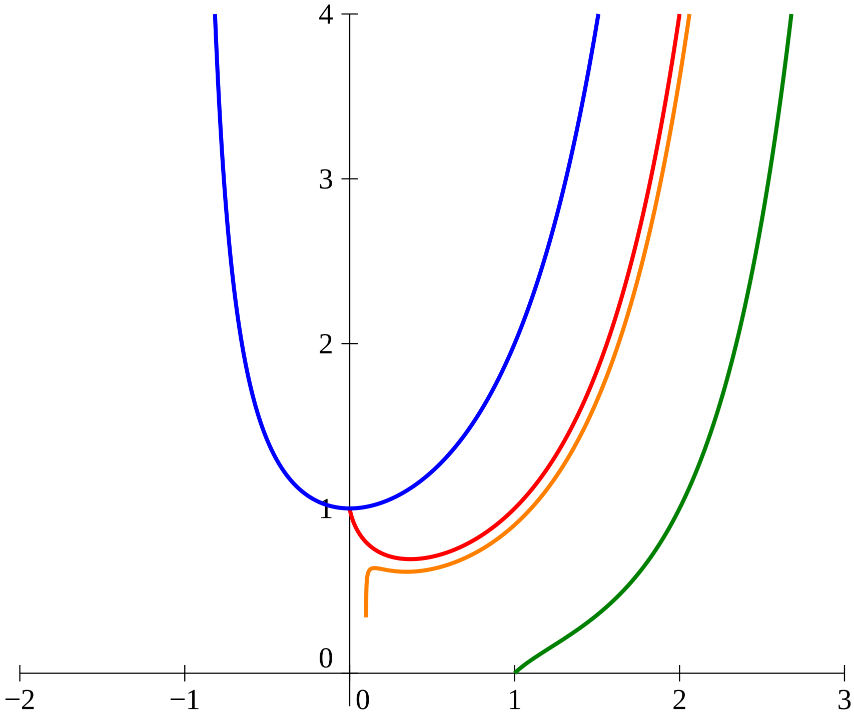


Exercice 3

1. On écrira bien sûr $f_a(x) = e^{x\ln(x-a)}$ pour toute la suite de l'exercice. En particulier, $\mathcal{D}_{f_a} =]a, +\infty[$. Indépendemment de la valeur de a, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$. De l'autre côté, on aura toujours $\lim\limits_{x\to a} \ln(x-a) = -\infty$. Si $a < 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to a} x\ln(x-a) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$. Au contraire, si $a > 0$, on aura $\lim\limits_{x\to a} x\ln(x-a) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to a} f_a(x) = 0$. Enfin, cas particulier pour $x = 0$, on recourt à la croissance comparée pour affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x) = 1$.
2. Une question facile : la fonction est dérivable sur son domaine de définition et $f_a'(x) = \left(\ln(x-a) + \dfrac{x}{x-a}\right)e^{x\ln(x-a)}$.
3. Si $a = 0$, $f_0(x) = x^x$, et $f_0'(x) = (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$, qui est du signe de $\ln(x)+1$. En particulier, la dérivée s'annule pour $x = \dfrac{1}{e}$, et $f_0\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$ (on ne peut pas simplifier plus). D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme le signe de la dérivée calculée plus haut n'a rien d'évident, posons $g_a(x) = \ln(x - a) + \dfrac{x}{x-a}$, et dérivons à nouveau pour tenter de trouver le signe : g_a est dérivable et $g_a'(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{x-a-x}{(x-a)^2} = \dfrac{x-2a}{(x-a)^2}$. Cette dérivée étant strictement positive sur $]a,+\infty[$, g_a est strictement croissante sur son domaine de définition. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x) = +\infty$, et, en écrivant par exemple $g_a(x) = \dfrac{(x-a)\ln(x-a)+a}{x-a}$, la croissance comparée permet d'affirmer que le numérateur de la fraction tend vers a quand x tend vers a, et donc que $\lim\limits_{x\to a} g_a(x) = -\infty$. La fonction g_a effectue donc une bijection de $]a,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, et s'annule en particulier une seul fois sur cet intervalle. Peut-on savoir quand ? Non, c'est trop compliqué. Contentons-nous donc de constater que f_a sera décroissante puis croissante sur $]a,+\infty[$. Si on veut vraiment dire plus, on peut calculer $g_a(0) = \ln(-a)$, et constater que $g_a(0) > 0$ si et seulement si $a < -1$. Dans ce cas, le minimum de f_a sera atteint dans l'intervalle $]a,0[$. Si $a \in]-1,0[$, le minimum sera atteint sur $]0,+\infty[$. Dans le cas particulier où $a = -1$, f_{-1} atteint son minimum en 0, de valeur $f_{-1}(0) = e^0 = 1$ (on peut d'ailleurs constater qu'on a toujours $f_a(0) = 1$ quand f_a est définie en 0).
5. Dans le cas où $a > 0$, le calcul effectué pour la dérivée de g_a reste valable, et cette dérivée est décroissante sur $]a, 2a]$, et croissante ensuite. Les limites de g_a en a et en $+\infty$ sont toutes deux égales à $+\infty$ (mêmes calculs que ci-dessus). Le signe de g_a dépend donc du signe de son minimum, c'est-à-dire de $g_a(2a) = \ln(a)+2$. Pour que g_a (et donc f_a') s'annule une unique fois, il faut avoir $g_a(2a) = 0$, c'est-à-dire $\ln(a)+2 = 0$. La valeur recherchée est donc $\alpha = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.
6. Si $a > \alpha$, par croissance de la fonction ln, $g_a(2a) = \ln(a) + 2 > 0$, et la fonction g_a est donc toujours strictement positive, ce qui implique bien que f_a sera strictement croissante sur son domaine de définition.
7. Au contraire, si $a < \alpha$, g_a a un minimum strictement négatif, et (d'après le théorème de la bijection), sera donc bijective d'une part de $]a, 2a]$ vers un intervalle $[g_a(2a), +\infty[$ contenant 0, d'autre part de $[2a, +\infty[$ vers ce même intervalle. En particulier, g_a et f_a' s'annulent donc exactement deux fois, une fois dans l'intervalle $]a, 2a]$, une autre dans l'intervalle $[2a, +\infty[$, ce qui correspond à ce que demande l'énoncé.
8. À nouveau une question facile : si $a < b$, on aura toujours $\ln(x-a) < \ln(x-b)$ pour les valeurs de x pour lesquelles ces deux expressions sont définies, et donc $f_a(x) < f_b(x) \Leftrightarrow x > 0$. La courbe représentative de f_a est donc en-dessous de celle de f_b sur $\mathbb{R}^{+*}$ (ou sur un le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lequel les deux fonctions sont définies), et au-dessus quand $x < 0$. Les courbes qui sont définies en 0 se coupent au point de coordonnées $(0, 1)$, comme on l'a déjà signalé plus haut.
9. On a déjà donné le tableau de variations complet de f_0, ainsi que toutes les information intéressantes concernant f_{-1}. La fonction f_1 est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, avec une limite nulle en 1. Enfin, $f_{\frac{1}{10}}$ est croissante sur $\left]\dfrac{1}{10}, x_1\right]$, pour une valeur de x_1 comprise entre $\dfrac{1}{10}$ et $\dfrac{1}{5}$ (et avec une limite nulle en $\dfrac{1}{10}$), puis décroissante sur $[x_1, x_2]$ avec $x_2 > \dfrac{1}{5}$ (mais on n'en sait pas beaucoup plus) et à nouveau croissante ensuite. Voici les courbes tracées sur ordinateur, $a = 0$ en rouge, $a = -1$ en bleu, $a = 1$ en vert et $a = \dfrac{1}{10}$ en orange (exceptionnellement sans tangentes horizontales pour ne pas surcharger) :



Problème

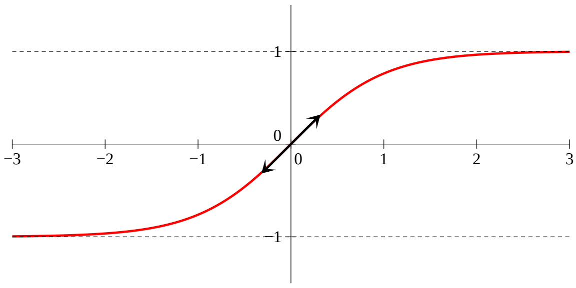
I. Étude de la fonction th.

1. La fonction ch étant toujours strictement positive, th est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $\text{th}(x) = \dfrac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}-1)} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$. Enfin, la fonction th est impaire en tant que quotient d'une fonction impaire par une fonction paire.

2. Calculons, par exemple à l'aide de la deuxième forme donnée à la question précédente : $\text{th}'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^x(e^x+e^{-x}))^2} = \left(\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2 = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$. Comme par ailleurs $1 - \text{th}^2(x) = 1 - \dfrac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$, les deux formules sont bien équivalentes. La fonction th a donc une dérivée strictement positive, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Sous sa deuxième forme, le calcul de limite en $-\infty$ est immédiat : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = \dfrac{-1}{1} = -1$. Par imparité de la fonction th, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$. La fonction th est donc bijective (en tant que fonction continue strictement monotone) de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$. On peut dresser si on le souhaite le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
th	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

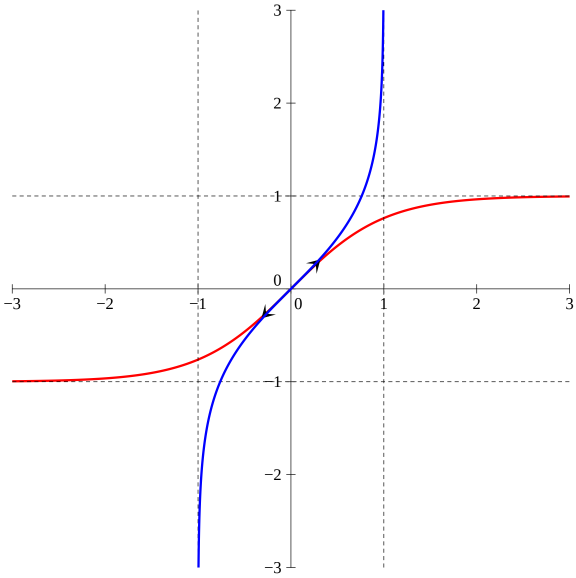
3. Puisque $\text{th}(0) = 0$ et $\text{th}'(0) = 1 - \text{th}^2(0) = 1$, la tangente à l'origine a pour équation $y = x$. Une allure de la courbe :



4. Un calcul immédiat donne $\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$. Les deux formules à démontrer se résument alors aux égalités $e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{-x-y} = e^{-x} e^{-y}$, qui découlent des propriétés bien connues de la fonction exponentielle.
5. En développant tout brutalement, $\mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$, et $\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) - \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$. En faisant la somme des deux équations et en divisant par 2, on obtient alors $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)$. En faisant la différence et en divisant par 2, on a cette fois $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y)$.
6. On peut faire le même calcul que pour la formule d'addition des tangentes : on divise les deux formules, puis on divise tout en haut et en bas par $\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y)$, ce qui donne $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y)}{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y)} = \dfrac{\mathrm{th}(y) + \mathrm{th}(x)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$.

II. Réciproque de la fonction th.

1. Pas besoin de calcul en effet, la réciproque est continue, strictement croissante, avec deux asymptotes verticales en -1 et en 1. Allez, les deux courbes ensembles :



2. On peut écrire $\mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{Argth}(x))} = \dfrac{1}{1 - \mathrm{th}^2(\mathrm{Argth}(x))}$. Or, $\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(x)) = x$ quel que soit le réel x, donc $\mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.
3. Puisque $y = \mathrm{Argth}(x)$, on peut écrire $x = \mathrm{th}(y) = \dfrac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1}$, soit $xe^{2y} - x = e^{2y} + 1$. En regroupant différemment, on trouve bien $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$. Autrement dit, $y = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(pas de problème, tout est positif si $x \in]-1,1[$). Cette expression est plus facile à dériver directement. Posons $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$, alors $g'(x) = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$, donc $\text{Argth}'(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$. Ouf, on retrouve la bonne formule.

4. (a) La fonction f est définie à condition d'avoir $0 \leq \dfrac{\text{ch}(x)-1}{\text{ch}(x)+1} < 1$ (le quotient doit être positif à cause de la racine carrée, et la racine carrée doit ensuite être strictement inférieure à 1 pour que la composition par Argth soit possible, donc le quotient lui-même doit être strictement inférieur à 1). Comme on sait que ch est minorée par 1, on a toujours $0 \leq \text{ch}(x)-1 < \text{ch}(x)+1$, donc la fonction f est toujours définie. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

   (b) En reprenant les résultats précédents, $f(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{1-\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{y+1+y-1+2\sqrt{(y-1)(y+1)}}{(y+1)-(y-1)}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(y+\sqrt{y^2-1})$.

   (c) En remplaçant y par $\text{ch}(x)$, on trouve donc $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\text{ch}(x)+\sqrt{\text{ch}^2(x)-1})$. Or $\sqrt{\text{ch}^2(x)-1} = \sqrt{\text{sh}^2(x)} = |\text{sh}(x)| = \text{sh}(|x|)$ (car la fonction sh est impaire). Comme la fonction ch, quant à elle, est paire, $\text{ch}(x) = \text{ch}(|x|)$, et $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\text{ch}(|x|)+\text{sh}(|x|)) = \dfrac{1}{2}\ln(e^{|x|}) = \dfrac{|x|}{2}$.

III. Une équation fonctionnelle.

1. Les constantes solutions sont les réels k vérifiant $k = \dfrac{2k}{1+k^2}$, soit $k(1+k^2) = 2k$. Soit $k = 0$, soit $1+k^2 = 2$, donc $k = \pm 1$. Il y a donc trois fonctions constantes solutions.
2. Puisque vous n'êtes pas censés connaitre de formules de trigonométrie hyperbolique compliquées, faisons un calcul brutal : $\dfrac{2\,\text{th}(x)}{1+\text{th}(x)^2} = \dfrac{\frac{2e^x-2e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{1+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}} = \dfrac{2(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2+(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{2e^{2x}+2e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \text{th}(2x)$.
3. En remplaçant x par 0, on trouve $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$, ce qui est exactement l'équation résolue à la première question. On a donc $f(0) = 0$, $f(0) = -1$ ou $f(0) = 1$.
4. On ose ? C'est complètement trivial ! En effet, en supposant f solution, $-f(2x) = \dfrac{-2f(x)}{1+(-f(x))^2}$, donc $-f$ est aussi solution, et $f(2kx) = \dfrac{2f(kx)}{1+f(kx)^2}$ en remplaçant simplement x par kx dans l'équation (ça doit être vrai pour tout réel, donc ça ne pose pas le moindre problème).
5. On peut toujours écrire $f(x) = \dfrac{2f(\frac{x}{2})}{1+f(\frac{x}{2})^2}$. Si on prouve que $\dfrac{2t}{1+t^2}$ est toujours compris entre -1 et 1 quelle que soit la valeur du réel t, la fonction f sera donc bornée par -1 et 1. On peut effectuer une étude de fonction pour obtenir l'encadrement, ou être astucieux : $(t+1)^2 \geq 0$ implique $2t \geq -t^2-1$, soit en divisant par t^2+1 (qui est positif), $\dfrac{2t}{t^2+1} \geq -1$. De même, comme $(t-1)^2 \geq 0$, on peut dire que $2t \leq 1+t^2$, et en divisant à nouveau par t^2+1, on trouve cette fois-ci $\dfrac{2t}{t^2+1} \leq 1$. On a bien prouvé que $\dfrac{2t}{t^2+1} \in [-1;1]$, soit en posant $t = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $f(x) \in [-1;1]$.