TD n°2 : révisions pour le DS1

PTSI B Lycée Eiffel

24 septembre 2015

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x - 4\sqrt{x} \geq -3$
2. $|x^2 - 1| = |x - 2| - 1$
3. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$
4. $\ln(|x^2 + 2x|) < \ln(3)$

Exercice 2

On considère dans tout cet exercice la fonction f définie par $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x^2 - x - 2}\right|$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer l'image par f de $\dfrac{1}{2}$ et de $-\sqrt{2}$ (en donnant la forme la plus simple possible), ainsi que les antécédents par f de 1, de -2 et de 3.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 1$.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
5. Étudier les variations de f, et en déduire un tableau de variations complet de la fonction.
6. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 1.
7. Tracer une allure de la courbe représentative de f, ainsi que de la tangente calculée à la question précédente.

Exercice 3

On cherche dans ce dernier exercice à étudier la famille des fonctions f_a définies pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$ par $f_a(x) = (x - a)^x$.

1. Déterminer le domaine de définition de f_a, ainsi que les limites de f_a aux bornes de ce domaine.
2. Calculer la dérivée $f_a'(x)$ de la fonction f_a.
3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f_0.
4. Étudier les variations de la fonction f_a dans le cas où $a < 0$.
5. Montrer qu'il existe une seule valeur de a strictement positive pour laquelle f_a' s'annule exactement une fois, sans changer de signe. On notera cette valeur α.
6. Vérifier que, si $a > \alpha$, f_a est strictement croissante sur son domaine de définition.
7. Montrer que, si $a \in]0, \alpha[$, f_a' s'annule en deux valeurs x_1 et x_2 vérifiant $a < x_1 < 2a < x_2$.
8. Étudier les positions relatives des courbes représentatives des différentes fonctions f_a.
9. Tracer une allure possible de la courbe représentative de la fonction $f_{\frac{1}{10}}$. Tracer sur le même graphique une allure des courbes des fonctions f_0, f_1 et f_{-1}.

Problème

Nous allons dans ce problème définir et tenter d'étudier les propriétés élémentaires d'une nouvelle fonction : la fonction **tangente hyperbolique** ou th définie par : $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

I. Étude de la fonction th.

1. Montrer que th est définie sur $\mathbb{R}$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. Déterminer la parité de th.
2. Calculer la dérivée de la fonction th et vérifier que $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$. En déduire le tableau de variations de th et prouver qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à préciser.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction th en son point d'abscisse 0, puis donner une allure de la courbe.
4. Simplifier, pour un réel x quelconque, l'expression de $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$ ainsi que celle de $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$. En déduire que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{sh}(x+y) = (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y))$ et $\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{sh}(x+y) = (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(y))$.
5. À l'aide des résultats de la question précédente, exprimer $\mathrm{sh}(x+y)$ et $\mathrm{ch}(x+y)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(y)$ et $\mathrm{sh}(y)$.
6. Démontrer que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{th}(x+y) = \dfrac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\,\mathrm{th}(y)}$.

II. Réciproque de la fonction th.

On note Argth la fonction réciproque de la fonction th, définie sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Donner sans aucun calcul une allure de la courbe de la fonction Argth, si possible dans le même repère que celle de la question I.3.
2. À l'aide de la formule de dérivation d'une réciproque, calculer la dérivée de la fonction Argth.
3. Soit $x \in I$ et $y = \mathrm{Argth}(x)$. Montrer que $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$, et en déduire une expression de Argth à l'aide de la fonction ln. Vérifier avec cette nouvelle expression que votre dérivée de Argth est correcte.
4. On considère désormais la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{Argth}\left(\sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{\mathrm{ch}(x) + 1}}\right)$.
   (a) Déterminer la domaine de définition de f.
   (b) En posant $y = \mathrm{ch}(x)$, montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.
   (c) En déduire que $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

Une équation fonctionnelle (pour aller beaucoup plus loin).

On cherche maintenant toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème.
2. Montrer que la fonction th est une solution du problème.
3. Soit f une solution, quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
4. Vérifier que, si f est solution, $-f$ également, et $g : x \mapsto f(kx)$ également (quelle que soit la valeur de $k \in \mathbb{R}$).
5. Montrer que toutes les valeurs prises par la fonction f sont comprises entre -1 et 1.