TD n°11 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

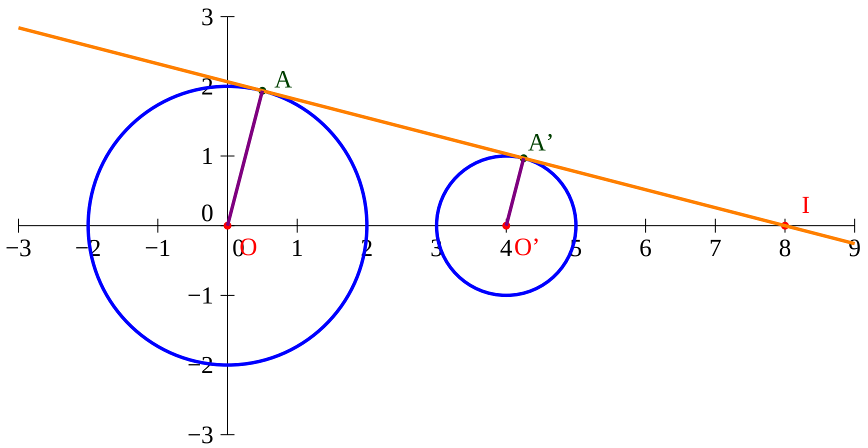
9 juin 2016

Exercice 1

1. Calculons donc : $u_1 = \dfrac{3}{2}\ln(2) - 1$, puis $u_2 = \dfrac{5}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - 1 = \dfrac{5}{2}\ln(3) - \dfrac{5}{2}\ln(2) - 1$ et $u_3 = \dfrac{7}{2}\ln(4) - \dfrac{7}{2}\ln(3) - 1 = 7\ln(2) - \dfrac{7}{2}\ln(3) - 1$. On en déduit $S_1 = u_1 = \dfrac{3}{2}\ln(2) - 1$, puis $S_2 = S_1 + u_2 = \dfrac{5}{2}\ln(3) - \ln(2) - 2$ et $S_3 = S_2 + u_3 = 6\ln(2) - \ln(3) - 3$. On finit avec la suite (v_n) : $v_2 = e^{1-S_1} = e^{2-\frac{3}{2}\ln(2)} = \dfrac{2^2}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{e^2}{2\sqrt{2}}$; puis $v_3 = e^{3+\ln(2)-\frac{5}{2}\ln(3)} = \dfrac{2e^3}{9\sqrt{3}}$, et enfin $v_4 = e^{4+\ln(3)-6\ln(2)} = \dfrac{3e^4}{64}$.
2. Il faut bien évidemment être très soigneux dans son calcul d'équivalent, et écrire des o pour ne pas prendre le risque d'additionner les équivalents. En fait, on a besoin de pousser le développement limité du ln à l'ordre 3 pour obtenir l'équivalent demandé. On écrit donc $u_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2} + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 1 \sim \dfrac{1}{12n^2}$. La série (S_n) a donc un terme général équivalent à celui d'une série de Riemann convergente, elle converge nécessairement. La suite (S_n) a donc une limite finie, et (v_n) également. On peut ajouter que la limite de (v_n) est forcément un réel strictement positif (exponentielle d'un réel quelconque).
3. Procédonc par exemple par récurrence, en notant P_n la propriété : $S_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln(n + 1) - n - \ln(n!)$. Au rang 1, on vérifie que $\dfrac{3}{2}\ln(2) - 1 - \ln(1) = S_1$, c'est le cas. Supposons désormais la formule vérifiée au rang n, alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln(n + 1) - n - \ln(n!) + \left(n + \dfrac{3}{2}\right)\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) - 1 = \left(n + \dfrac{3}{2}\right)\ln(n + 2) - \ln(n + 1) - (n + 1) - \ln(n!) = \left(n + \dfrac{3}{2}\right) - (n + 1) - \ln((n + 1)!)$, ce qui prouve P_{n+1}. La propriété est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$.
4. D'après la question précédente, $S_{n-1} = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln(n) - n + 1 - \ln((n - 1)!)$, donc $v_n = e^{1-S_{n-1}} = e^{n+\ln((n-1)!)-(n+\frac{1}{2})\ln(n)} = \dfrac{e^n \times (n - 1)!}{n^{n-\frac{1}{2}}} = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ (en multipliant numérateur et dénominateur par n).
5. Puisqu'on sait que (v_n) admet une limite l strictement positive, on peut écrire $v_n \sim l$, soit $\dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim l$, ce qui revient à dire que $n! \sim l\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

Exercice 2

1. Pas vraiment besoin de calculs pour se rendre compte que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 2. Pour le deuxième cercle, on écrit son équation sous la forme $(x-4)^2-16+y^2+15=0$, soit $(x-4)^2+y^2=1$. Il s'agit donc du cercle de centre $O'(4,0)$ et de rayon 1.
2. Pas besoin de se fatiguer : $OO'=4$ (calcul extrêmement difficile) et $R+R'=3$, il n'y a pas d'intersection.
3. Notons (x,y) les coordonnées d'un point I vérifiant cette condition, on a alors $-x=2(4-x)$ et $-y=-2y$, soit $x=8$ et $y=0$. L'unique point cherché est donc $I(8,0)$.
4. L'équation donnée est bien une équation de droite, et elle passe par le point M puisque $a^2+b^2-4=0$ si M appartient au cercle $\mathcal{C}$. De plus, elle admet pour vecteur normal le vecteur de coordonnées (a,b), qui n'est autre que le vecteur $\overrightarrow{OM}$. La droite est donc bien tangente au cercle au point M.
5. Ce point $A(x,y)$ vérifie d'une part $x^2+y^2=4$, et d'autre part $8x-4=0$ (en remplaçant les coordonnées du point I dans l'équation de la tangente qu'on vient d'obtenir), soit $x=\dfrac{1}{2}$, puis $y^2=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$. L'énoncé nous impose de choisir $y=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$, et donc $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$.
6. Ce projeté orthogonal $H(x,y)$ appartient par définition à la droite (AI), donc à la tangente à $\mathcal{C}$ au point A. En multipliant par 2 l'équation obtenue à la question 4, on trouve la première condition $x+\sqrt{15}y=8$. De plus, on doit avoir $\overrightarrow{O'H}.\overrightarrow{AI}=0$, avec $\overrightarrow{O'H}(x-8,y)$, et $\overrightarrow{AI}\left(\dfrac{15}{2},-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$. Quitte à multiplier une nouvelle fois tout par 2, on trouve la deuxième condition $15(x-4)-\sqrt{15}y=0$, soit $15x-\sqrt{15}y=60$. La somme des deux équations obtenues donne immédiatement $16x=68$, soit $x=\dfrac{17}{4}$, et on en déduit $y=\dfrac{8-x}{\sqrt{15}}=\dfrac{15}{4\sqrt{15}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Autrement dit, $H\left(\dfrac{17}{4};\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$.
7. Cette distance n'est autre que la distance $O'H=\sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}}=1$. Cette distance étant la même que le rayon du cercle $\mathcal{C}'$, le point H appartient donc à ce cercle, et la droite (AI) est aussi tangente au cercle $\mathcal{C}'$.
8. Concluons donc joliment :



Exercice 3

1. Après un seul tirage, deux situations possible : on a tiré une boule rouge avec probabilité et on a alors $Y_1 = 1$; ou on a tiré une boule bleue avec probabilité $\frac{1}{3}$ et on garde $Y_1 = 2$. On a donc $P(Y_1 = 2) = \frac{1}{3}$ et $P(Y_1 = 1) = \frac{2}{3}$, d'où $E(Y_1) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$; puis $E(X^2) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$, donc d'après la formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$.
2. On a en général $Y_n(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ (puisqu'il y a remise tant qu'on tire des boules bleues, on peut garder 2 boules rouges autant de temps qu'on le veut).
3. Pour avoir $Y_n = 2$, il faut tirer la boule bleue n fois de suite (il y aura toujours une seule boule bleue dans l'urne dans ce cas), ce qui se produit avec une probabilité de $\frac{1}{3^n}$.
4. (a) Pour avoir $Y_2 = 1$, il faut soit tirer la boule bleue puis une rouge, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$; soit une rouge puis une des deux bleues qui sont alors dans l'urne, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$. Au total on a bien $P(Y_2 = 1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

   (b) Commençons par noter que $P_{Y_n=0}(Y_{n+1} = 1) = 0$, $P_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$ (puisqu'il y a alors deux boules bleues dans l'urne) et $P_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$ (puisqu'il y a cette fois-ci deux boules rouges dans l'urne). Les évènements $Y_n = 0$, $Y_n = 1$ et $Y_n = 2$ forment un système complet d'évènements. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^n}$, ce qui donne bien la formule souhaitée. Pour $n = 1$, on a $\frac{2}{3}u_1 + \frac{2}{3^2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = u_2$. La relation est donc également vraie pour $n = 1$.

   (c) Hum, oublions cette question.

   (d) Calculons donc $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{2}{3^n}\right) = \frac{2}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

   (e) Comme $v_1 = u_1 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, on obtient $v_n = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{n+1}}{3^n}$, puis $u_n = \frac{2^{n+1} - 2}{3^n}$.

   (f) On a bien sûr $P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_n = 2) - P(Y_n = 1) = 1 - \frac{1}{3^n} - \frac{2^{n+1} - 2}{3^n} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{3^n}$.

   (g) Par définition, $E(Y_n) = \frac{2^{n+1} - 2}{3^n} + \frac{2}{3^n} = \frac{2^{n+1}}{3^n}$.

   (h) i. On a simplement $A_n = (Y_n = 0) \cap (Y_{n-1} = 1)$.

      ii. On en déduit que $P(A_n) = P(Y_{n-1} = 1) \times P_{Y_{n-1}=1}(Y_n = 0) = \frac{1}{3}P(Y_{n-1} = 1) = \frac{2^n - 2}{3^n}$.

      iii. Calculons donc (ce sont des séries géométriques toutes bêtes) : $\sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 - \frac{2}{3} - 2\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}\right) = 3 - \frac{5}{3} - 3 + \frac{8}{3} = 1$. Cela revient à dire que la probabilité qu'on finisse par tirer la dernière boule blanche vaut 1. Autrement dit, il est quasiment certain qu'on finira par tirer les deux boules rouges.

Exercice 4

1. (a) Il y a $\binom{2n}{n}$ tirages possibles au total (l'ordre n'a aucune importance ici), dont un seul donnant toutes les boules numéro 0, donc la probabilité demandée vaut $\frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

   (b) Si on impose que la boule numéro i soit tirée, il reste à choisir $n-1$ boules parmi les $2n-1$ restantes, donc la probabilité de tirer le numéro i vaut $\frac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ (plutôt logique puisqu'on tire la moitié des boules de l'urne).

   (c) Si $n \leq 3$, cette probabilité vaut bien sûr 1. Dans le cas contraire, il y a $n+3$ boules dont le numéro n'atteint pas 4, donc la probabilité vaut $\frac{\binom{n+3}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n+3)!}{6n!} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{n!(n+3)!}{6(2n)!}$.
   Pour $n = 6$, on obtient $\frac{6! \times 9!}{6 \times 12!} = \frac{6!}{6 \times 10 \times 11 \times 12} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{10 \times 11 \times 12} = \frac{1}{11}$.

2. (a) La variable X_i suit bien sûr une loi binômiale, et au vu de la question 1.b, son paramètre vaut $\frac{1}{2}$. On a donc $E(X_i) = \frac{1}{2}$ et $V(X_i) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

   (b) La variable X_iX_j est aussi une variable de Bernoulli (quand on multiplie des 0 et des 1, on ne peut pas obtenir autre chose que 0 ou 1), et $P(X_iX_j = 1) = P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$. Cet évènement se produit si on tire simultanément les boules i et j, ce qui laisse $\binom{2n-2}{n-2}$ choix pour les boules restantes. On a donc $P(X_iX_j = 1) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \times \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{n(n-1)}{(2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$. Comme $P(X_i = 1) \times P(X_j = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{n-1}{2(2n-1)}$, les deux évènements ne sont pas indépendants.

3. (a) La variable iX_i vaut i si la boule numéro i est tirée, 0 sinon. En faisant la somme de ces variables, on obtient donc la somme des numéros tirés (les boules 0 n'ayant évidemment aucune influence sur cette somme).

   (b) Par linéarité, $E(S) = \sum_{i=1}^{i=n} iE(X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.

   (c) On veut avoir $\frac{n(n+1)}{4} \geq 30$, soit $n(n+1) \geq 120$. Les plus courageaux iront résoudre l'inéquation du second degré, les autres constateront que $n(n+1)$ est croissant sur $\mathbb{N}$, que $10 \times 11 < 120$ mais $11 \times 12 > 120$. Il faut donc avoir $n \geq 11$.

4. (a) Comme il y a n boules portant le numéro 0 et n ne le portant pas, le nombre de tirages vérifiant $Z = k$ est de $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ (k boules choisies dans le premier lot, $n-k$ dans le deuxième), ou encore $\binom{n}{k}^2$ en utilisant la symétrie des coefficients binômiaux. On a donc $P(Z = k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$. Comme Z prend ses valeurs entre 0 et n, on aura $\sum_{k=0}^{k=n} P(Z = k) = 1$, ce qui donne bien (en faisant passer le dénominateur constant à droite) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (qui n'est autre qu'un cas particulier de la formule de Vandermonde).

   (b) Si $n = 2$, on a $\binom{2n}{n} = \binom{4}{2} = 6$; et $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$ et $\binom{2}{1} = 2$, d'où $P(Z = 0) =$

$P(Z=2) = \dfrac{1}{6}$ et $P(Z=1) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. On en déduit $E(Z) = 1$ (la loi est symétrique), puis $E(Z^2) = \dfrac{4}{6} + \dfrac{4}{6} = \dfrac{4}{3}$, donc, via König-Huygens, $V(Z) = \dfrac{4}{3} - 1^2 = \dfrac{1}{3}$.

(c) On a manifestement $X + Z = n$, donc $X = n - Z$. Or, Z et X suivent la même loi (même raisonnement pour calculer la loi de X que pour celle de Z), donc ont la même espérance. Par linéarité, on obtient donc $2E(X) = n$, soit $E(X) = E(Z) = \dfrac{n}{2}$.

(d) Par ailleurs, $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} X_i$, donc $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.

(e) En revenant à la définition, $E(Z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} i \frac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{n}}$. On peut faire démarrer la somme à $i = 0$ (ça ne change rien) et faire passer la constante du dénominateur de l'autre côté pour obtenir, en utlisant la valeur de $E(Z)$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} i \binom{n}{i}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.