

TD n°1

PTSI B Lycée Eiffel

3 septembre 2015

Exercice 1

Simplifier le plus possible (et le plus rapidement possible aussi!) les expressions suivantes :

- $\frac{5}{18} + \frac{7}{12}$
- $2^{n+3} - 2^n + 5 \times 2^{n+1} - 3 \times 2^{n+2}$
- $\frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$
- $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{648}}$
- $\frac{12 \times 10^4 \times 9}{5^{-2} \times 15^3 \times 128}$
- $(3 - 2\sqrt{3})^3$

Exercice 2

Étudier le plus complètement possible les fonctions suivantes :

- $f(x) = x \ln(x+1)$
- $g(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$
- $h(x) = \cos(2x) - 2 \cos(x)$

Problème

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit sur $[1; +\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \sqrt{x+1}e^{-nx}$, et on note \mathcal{C}_n sa courbe représentative.

1. Étudier la fonction f_1 , et dresser son tableau de variations.
2. Calculer la dérivée f'_n de la fonction f_n . En déduire que la fonction f_n admet un maximum global sur son domaine de définition, dont on donnera la valeur. Quelles sont les limites de l'abscisse et de la valeur du maximum lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1} f'_n(x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe \mathcal{C}_n ?
4. Montrer que toutes les courbes \mathcal{C}_n admettent deux points communs que l'on précisera, ainsi qu'une asymptote horizontale commune.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_n en son point d'abscisse 0.
6. Déterminer la position relative de \mathcal{C}_n et de \mathcal{C}_{n+1} .
7. Tracer dans un même repère une allure des courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 .