NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

31 mai 2016

1. Cf cours.
2. Si on comprend correctement l'énoncé, $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (le joueur peut très bien arrêter en n'ayant pas gagné une seule partie, et il en gagnera au maximum 5 avant de s'arrêter). Sans problème, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ (une chance sur deux de perdre la première partie), puis $P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (on gagne la première partie avec proba $\frac{1}{2}$, et on perd la deuxième avec proba $\frac{2}{3}$) ; $P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$; $P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{30}$; $P(X = 4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{144}$. Enfin, pour la dernière probabilité, il faut gagner les cinq premières parties sans se préocupper de ce qui se passera ensuite, soit $P(X = 5) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$. On peut bien sûr, représenter la série de parties sous forme d'arbre pour expliquer ces calculs, et on vérifie que la somme des six probabilités calculées vaut bien 1. Résumons en tout cas avec un petit tableau :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{720}$

Passons donc au calcul de l'espérance : $E(X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{36} + \frac{1}{144} = \frac{1}{10} + \frac{48 + 36 + 4 + 1}{144} = \frac{1}{10} + \frac{89}{144} = \frac{72 + 445}{720} = \frac{517}{720}$ (qui ne se simplifie aps le moins du monde). Pour obtenir la variance, on commence par calculer $E(X^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{9} + \frac{5}{144} = \frac{3}{10} + \frac{48 + 72 + 16 + 5}{144} = \frac{3}{10} + \frac{141}{144} = \frac{216 + 705}{720} = \frac{921}{720}$, puis on applique la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{921}{720} - \frac{517^2}{720^2} = \frac{663\ 120 - 267289}{518\ 400} = \frac{395\ 831}{518\ 400}$. Hum, à la main, c'est définitivement horrible comme calcul.
3. (a) On est dans une situation typique de loi binômiale : on répète cinq fois la même expérience (répondre à une question au hasard, probabilité $\frac{1}{3}$ de réussir), et on compte le nombre de fois où l'expérience a réussi. On a donc $X \sim \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{3}\right)$. En particulier, $E(X) = \frac{5}{3}$ et $V(X) = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$.
   (b) Chaque bonne réponse (il y en a X) rapporte 2 points, et chaque mauvaise réponse (il y en a $5 - X$) rapporte -1 point, donc $Y = 2X - (5 - X) = 3X - 5$. On en déduit que $E(Y) = 3E(X) - 5 = 0$ (par linéarité de l'espérance), et $V(Y) = 9V(X) = 10$ (en appliquant la formule $V(aX + b) = a^2V(X)$).
   (c) S'il répond à une seule question, il a une probabilité $\frac{1}{3}$ d'avoir juste et d'atteindre la note de 2. S'il répond à quatre questions, la probabilité qu'il en ait exactement deux de justes

vaut $\binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{81}$. Mais il peut aussi avoir encore plus de chance et trouver trois réponses justes sur quatre, avec une probabilité $4 \times \frac{1}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$, voire même avoir les quatre réponses justes, avec probabilité $\frac{1}{81}$. Au total, la probabilité qu'il atteigne (ou dépasse) la note de 2 vaut donc $\frac{24+8+1}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27} > \frac{1}{3}$. Il a donc intérêt à tenter de répondre à quatre questions. On peut aussi passer par le complémentaire pour ce calcul : il a une proba $\frac{16}{81}$ d'avoir tout faux, et $\frac{32}{81}$ d'avoir exactement une bonne réponse sur quatre.

(d) Un élève qui répond à tout au hasard a une probabilité $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$ d'avoir tout faux (et donc une note égale à -5), ce qui lui laisse une probabilité $\frac{211}{243}$ d'éviter cette humiliation. Chacun des dix élèves constituant une nouvelle expérience indépendante ayant cette même probabilité de « succès », on est en présence d'une variable binômiale : $Z \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{211}{243}\right)$. En particulier, $E(Z) = \frac{2110}{243}$, et $V(Z) = 10 \times \frac{211}{243} \times \frac{32}{243}$ (c'est très moche).