Interrogation Écrite n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

5 avril 2016

1. - Voir le cours !
   - Rappelons que $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$, donc $1+x+\sqrt{1+x} = 2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$. On fait attention à bien factoriser par 2, et en posant $u = \frac{3}{4}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x^3$, on peut développer la composée : $\ln(2+2u) = \ln(2)+\ln(u) = \ln(2)+u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3+o(u^3) = \ln(2)+\frac{3}{4}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x^3-\frac{9}{32}x^2+\frac{3}{64}x^3+\frac{9}{64}x^3+o(x^3) = \ln(2)+\frac{3}{4}x-\frac{11}{32}x^2+\frac{7}{32}x^3+o(x^3)$.

2. (a) L'application f est manifestement à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Posons $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$, alors $f(\lambda u+\mu v) = f(\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y') = (4\lambda y+4\mu y'-3\lambda x-3\mu x', 9\lambda y+9\mu y'-8\lambda x-8\mu x') = \lambda(4y-3x, 9y-8x)+\mu(4y'-3x', 9y'-8x') = \lambda f(x, y)+\mu f(x', y') = \lambda f(u)+\mu f(v)$. L'application est linéaire, c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Il faut pour cela résoudre le système $\begin{cases} 4y - 3x = 0 \\ 9y - 8x = 0 \end{cases}$. Les deux équations impliquent $y = \frac{3}{4}x = \frac{8}{9}x$, donc $x = 0$ puis $y = 0$. On a donc $\ker(f) = \{0\}$, l'application f est injective, et donc bijective puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

   (c) Calculons donc $f \circ f(x, y) = (4(9y-8x)-3(4y-3x), 9(9y-8x)-8(4y-3x)) = (24y-23x, 49y-48x)$. De l'autre côté, $6f(x, y)-5(x, y) = (24y-18x, 54y-48x)-(5x, 5y) = (24y-23x, 49y-48x)$, c'est-à-dire la même chose que $f^2(x, y)$. On a bien prouvé que $f^2 = 6f-5\,\mathrm{id}$.

   (d) Pour le premier noyau, il faut résoudre le système $\begin{cases} 4y - 3x = x \\ 9y - 8x = y \end{cases}$. Les deux équations se ramènent à la même condition $y = x$, donc $\ker(f-\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1, 1))$. En particulier, $\dim(F) = 1$. Pour le deuxième noyau, on résout $\begin{cases} 4y - 3x = 5x \\ 9y - 8x = 5y \end{cases}$. Cette fois-ci, les deux équations se ramènent à $4y-8x = 0$, soit $y = 2x$. On en déduit que $\ker(f-5\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1, 2))$, ce deuxième noyau est lui aussi de dimension 1.

   (e) Les calculs précédents prouvent que $\dim(F)+\dim(G) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. De plus, $F \cap G = \{0\}$ (manifestement les multiples du vecteur $(1, 1)$ ne sont pas les mêmes que les multiples du vecteur $(1, 2)$). Ce qui suffit à prouver que $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

   (f) En développant, on doit donc avoir $f = (a+b)f-(a+5b)\,\mathrm{id}$. L'égalité sera manifestement vérifiée si $a+b = 1$ et $a+5b = 0$, soit $b = 1-a$ et $a+5-5a = 0$, donc $a = \frac{5}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$.

   (g) Calculons donc $a^2(f-\mathrm{id})+b^2(f-5\,\mathrm{id}) = \frac{25}{16}(f-\mathrm{id})+\frac{1}{16}(f-5\,\mathrm{id}) = \frac{13}{8}f-\frac{15}{8}\,\mathrm{id}$. Manifestement, ça ne marche pas du tout. Modifions donc « légèrement » l'énoncé, et posons $a' = 5$, et $b' = 1$, de sorte que $f = \frac{a'}{4}(f-\mathrm{id})-\frac{b'}{4}(f-5\,\mathrm{id})$. Calculons désormais ce que vaut $\frac{a'^2}{4}(f-\mathrm{id})-\frac{b'^2}{4}(f-5\,\mathrm{id}) = \frac{25}{4}(f-\mathrm{id})-\frac{1}{4}(f-5\,\mathrm{id}) = 6f-5\,\mathrm{id} = f^2$. Là, ça marche.

(h) Il faudrait déjà savoir ce que vaut f^{-1}, mais on l'obtient facilement à partir de la formule $f^2 = 6f - 5\,\mathrm{id}$, qu'on peut écrire $f \circ (6\,\mathrm{id} - f) = 5\,\mathrm{id}$. On en déduit que $f^{-1} = \frac{6}{5}\,\mathrm{id} - \frac{1}{5}f$. On ne retrouve jamais la formule souhaitée avec a et b, mais tentons le coup avec a' et b' : on calcule $\frac{a'^{-1}}{4}(f - \mathrm{id}) - \frac{b'^{-1}}{4}(f - 5\,\mathrm{id}) = \frac{1}{20}(f - \mathrm{id}) - \frac{1}{4}(f - 5\,\mathrm{id}) = -\frac{1}{5}f + \frac{6}{5}\,\mathrm{id}$. Là encore, ça marche. Une sombre histoire de projecteurs est cachée derrière tout ça.

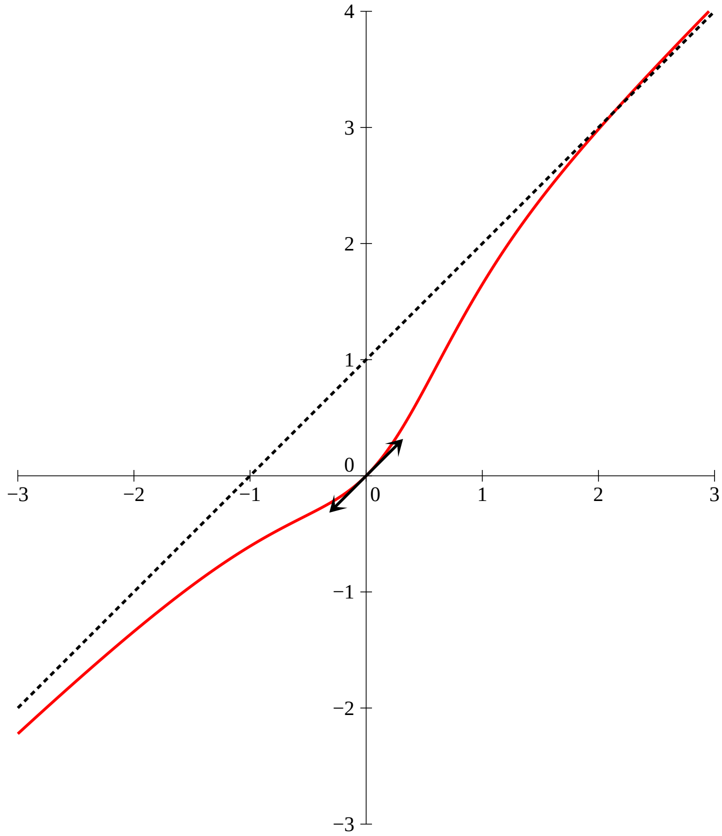
3. (a) Non, ne rêvez pas, cette question ne rapportera pas grand chose : $x^2 + 1$ étant toujours positif, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

(b) Comme on va multiplier par x, un DL à l'ordre 2 de l'exponentielle suffit : $\frac{x}{1+x^2} = x(1 - x^2 + o(x^2)) = x + o(x^2)$, puis $e^{\frac{x}{1+x^2}} = e^{x+o(x^2)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, puis $f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. La droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe en 0, et $f(x) - x \sim x^2$, donc $f(x) - x \geq 0$ au voisinage de 0. La courbe sera donc au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

(c) Commençons par poser $X = \frac{1}{x}$, histoire d'avoir une variable qui tend vers 0. On écrit alors $f(X) = \frac{1}{X}e^{\frac{X}{X^2+1}}$ (ce qui se trouve dans l'exponentielle reste inchangé après simplification). C'est chouette, on peut reprendre le calcul fait à la question précédente : $f(X) = \frac{1}{X}\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right) = \frac{1}{X} + 1 + \frac{1}{2}X + o(X)$, soit $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. On a donc une asymptote oblique d'équation $y = x+1$ en $+\infty$, et comme $f(x) - (x+1) \sim \frac{1}{2x} \geq 0$, la courbe sera au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$. Le calcul reste valable sans problème au voisinage de $-\infty$, l'asymptote est donc la même, mais la courbe se trouve en-dessous de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

(d) Calculons donc : $f'(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}} + x \times \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2}e^{\frac{x}{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)^2 + x(1-x^2)}{(x^2+1)^2}e^{\frac{x}{x^2+1}} = \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2+1)^2}e^{\frac{x}{x^2+1}}$. Cette dérivée est du signe de $g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$. On peut calculer $g'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1$, puis $g''(x) = 12x^2 - 6x + 4 = 3(4x^2 - 2x + 1)$. Le discriminant de la parenthèse est négatif, cette dérivée seconde est toujours positive. On en déduit que g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et s'annule une seule fois. Comme $g'(-1) = -4 - 3 - 4 + 1 < 0$, et $g'(0) = 1 > 0$, cette valeur d'annulation se trouve entre -1 et 0. La fonction g est donc décroissante puis croissante, avec un minimum atteint quelque part sur $[-1, 0]$. Or, $\forall x \in [-1, 0]$, on a $(x^2+1)^2 \geq 1$ (c'est vrai partout), et $x(1-x^2) \geq -1$, donc $g(x) \geq 0$. La fonction g a donc un minimum positif, et f' est toujours positive. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

(e) Eh bien voila :



4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3