

NOM :  
Prénom :

## Interrogation Écrite n°7

PTSI B Lycée Eiffel

5 avril 2016

1. Pour s'échauffer :

- Rappeler l'énoncé précis de la formule de Grassmann.
- Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction  $f : x \mapsto \ln(1 + x + \sqrt{1 + x})$ .

2. Pour ceux qui aiment les espaces vectoriels :

On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^2$  et on définit sur  $E$  l'application  $f : (x, y) \mapsto (4y - 3x, 9y - 8x)$ .

- Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
- Déterminer le noyau de  $f$ . Que peut-on en déduire sur l'application  $f$  ?
- Vérifier que  $f^2 = 6f - 5 \text{id}$ .
- Calculer les sous-espaces vectoriels  $F = \ker(f - \text{id})$  et  $G = \ker(f - 5 \text{id})$ .
- Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ .
- Déterminer deux constantes  $a$  et  $b$  telles que  $f = a(f - \text{id}) + b(f - 5 \text{id})$ .
- Vérifier que  $f^2 = a^2(f - \text{id}) + b^2(f - 5 \text{id})$ .
- Peut-on généraliser la formule précédente en affirmant que  $f^{-1} = a^{-1}(f - \text{id}) + b^{-1}(f - 5 \text{id})$  ?

3. Pour ceux qui aiment le calcul :

On pose  $f(x) = xe^{\frac{x}{x^2+1}}$ .

- Donner le domaine de définition de  $f$ .
- Donner un DL de  $f$  à l'ordre 3 en 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  en 0, ainsi que la position relative de la courbe et de cette tangente.
- Déterminer un développement asymptotique de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (on donnera suffisamment de termes pour faire les interprétations habituelles). Ce développements reste-t-il valable en  $-\infty$  ?
- Calculez la dérivée de  $f$  et en déduire les variations de la fonction.
- Tracer une allure de la courbe représentative de  $f$  tenant compte de tous les calculs effectués.