1. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{u_0 + u_n}{2}(n+1)$.
2. Revoir le cours si besoin.
3. La suite est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 4x - 6$, soit $x = 2$. On pose donc $v_n = u_n - 2$, et $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2) = 4v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$, donc $v_n = -4^n$, puis $u_n = v_n + 2 = 2 - 4^n$.
4. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Celle-ci a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, et admet donc deux racines $r_1 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$, et $r_2 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -1$. On peut donc écrire $u_n = \frac{\alpha}{2^n} + \beta(-1)^n$, avec au vu des valeurs initiales $\alpha + \beta = 1$ et $\frac{\alpha}{2} - \beta = 1$, d'où en additionnant $3\frac{\alpha}{2} = 2$, donc $\alpha = \frac{4}{3}$, puis $\beta = -\frac{1}{3}$. Finalement, $u_n = \frac{1}{3 \times 2^{n-2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{3}$.
5. Calculons donc $t_{n+1} = \frac{2u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{6u_n+2}{2u_n+4} - 1}{\frac{3u_n+1}{2u_n+4} + 1} = \frac{6u_n + 2 - 2u_n - 4}{3u_n + 1 + 2u_n + 4} = \frac{4u_n - 2}{5u_n + 5} = \frac{2}{5}t_n$. La suite (t_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et de premier terme $t_0 = \frac{2u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{2}$, donc $t_n = \frac{2^{n-1}}{5^n}$. Comme $t_n(u_n + 1) = 2u_n - 1$, on a $u_n(t_n - 2) = -1 - t_n$, soit $u_n = \frac{1 + t_n}{2 - t_n} = \frac{5^n + 2^{n-1}}{2 \times 5^n - 2^{n-1}}$.