Interrogation Écrite n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 novembre 2015

1. $I_1 = \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-3x}}{3}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-3}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3e^3} - \frac{1}{6}$.
2. $I_2 = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.
3. $I_3 = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^{\sqrt{2}} = -\frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^2}$.
4. On fait une IPP en posant $u'(t) = 2t$, donc $u(t) = t^2$, et $v(t) = \ln(t)$ donc $v'(t) = \frac{1}{t}$.
   On obtient $I_4 = [t^2 \ln(t)]_1^e - \int_1^e t\ dt = e^2 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^e = e^2 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2+1}{2}$.
5. On fait une IPP en posant $u'(x) = \sin(x)$, donc $u(x) = -\cos(x)$, et $v(x) = x$, donc $v'(x) = 1$.
   On obtient $I_5 = [-x\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\ dx = \pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi$.
6. Posons donc $u = \sqrt{t}$, soit $t = u^2$. Les bornes deviennent 1 et $\sqrt{2}$, et $dt = 2u\ du$, donc $I_6 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2+u} \times 2u\ du = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{u+1}\ du = [2\ln(u+1)]_1^{\sqrt{2}} = 2\ln(1+\sqrt{2}) - 2\ln(2) = 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.
7. La valeur absolue étant paire, $I_7 = 2\int_0^2 |x|\ dx = 2\int_0^2 x\ dx = [x^2]_0^2 = 4$.
8. On fait une double IPP en dérivant à chaque fois le cosinus :
   $I_8 = [\cos(t)e^t]_0^\pi + \int_0^\pi \sin(t)e^t\ dt = -e^\pi - 1 + [\sin(t)e^t]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t)e^t\ dt = -e^\pi - 1 - I_8$, donc $2I_8 = -e^\pi - 1$, et $I_8 = -\frac{e^\pi+1}{2}$.
9. On fait une IPP en posant $u'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, donc $u(x) = \tan(x)$, et $v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$.
   On obtient $I_9 = [x\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\ dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx = \frac{\pi}{4} + [\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.
10. On factorise le dénominateur sous la forme $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$. Puis on effectue la décomposition en éléments simples : $\frac{t}{(t-1)(t-2)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t-2}$. En multipliant par $t-1$ puis en prenant $t = 1$, on trouve $\frac{1}{-1} = a$, soit $a = -1$. En multipliant par $t-2$ puis en prenant $t = 2$, on trouve $\frac{2}{1} = b$, soit $b = 2$. Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale :

$I_{10} = \int_{-1}^{0} \frac{2}{t-2} - \frac{1}{t-1}\ dt = [2\ln(2-t) - \ln(1-t)]_{-1}^{0} = 2\ln(2) - 2\ln(3) + \ln(2) = 3\ln(2) - 2\ln(3) = \ln\left(\frac{8}{9}\right)$ (qui est légèrement négatif, ce qui est normal).