# Interrogation Écrite n°2 : corrigé

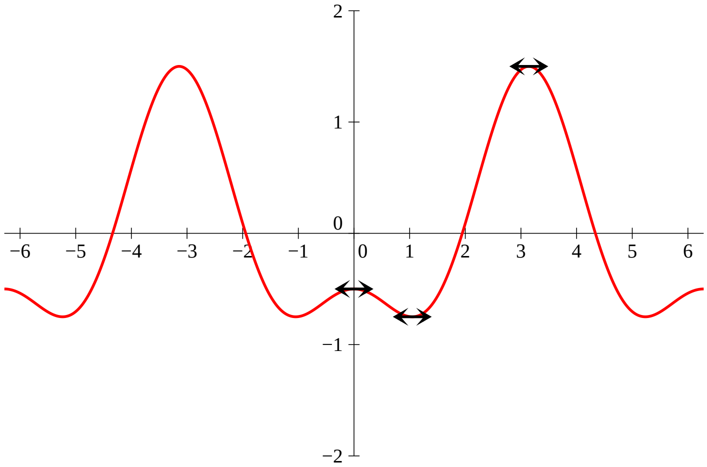
PTSI B Lycée Eiffel

9 octobre 2015

1. Cf cours.
2. Cf cours.
3. Posons donc $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$. La fonction $f$ est donc constante sur $]0, +\infty[$. Comme de plus $f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, l'égalité demandée est prouvée.
4. On va bien sûr procéder par récurrence. Au rang 1, on a $u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui prouve la propriété au rang 1. Supposons alors que $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$, alors $\frac{1}{+}\frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1 + u_n \leq 2$, et a fortiori $1 \leq 1 + u_n \leq 2$, ce qui implique $\frac{1}{2} \leq \frac{1+u_n}{2} \leq 1$, puis $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$, ce prouve la propriété au rang $n+1$. Elle est donc vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.
5. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, et elle est paire et $2\pi$-périodique, ce qui permet de réduire son intervalle d'étude à $[0, \pi]$. La fonction $f$ est dérivable, de dérivée $f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x) = -2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = \sin(x)(1 - 2\cos(x))$. Sur notre intervalle d'étude, le sinus est toujours positif, la dérivée est donc du signe de $1 - 2\cos(x)$, et s'annule en particulier quand $\cos(x) = \frac{1}{2}$, soit $x = \frac{\pi}{3}$ (et elle est négative avant cette valeur, puisque le cosinus est décroissant sur notre intervalle, $1 - 2\cos(x)$ est donc croissant). On calcule $f(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, $f(\pi) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$, et on peut dresser le tableau de vriations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f$ | $-\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}$ |

On conclut avec une jolie courbe :


2
1
0
−1
−2
−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6