

Interrogation Écrite n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 septembre 2015

1. Cf. cours.
2. J'ai plus de 80 de QI donc je n'aime pas le foot.
3. Commençons par étudier le signe de ce qui se trouve dans les valeurs absolues. Le trinôme $x^2 - 2x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 < 0$, il est donc toujours positif et la première valeur absolue ne sert à rien ! Il suffit donc de distinguer deux cas :
 - si $x \geq \frac{3}{2}$, on est ramenés à résoudre l'inéquation $x^2 - 2x + 2 - 2x + 3 \leq 2$, soit $x^2 - 4x + 3 \leq 0$. Le discriminant du membre de gauche vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, il admet pour racines $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. Le trinôme est négatif entre ses racines, donc sur l'intervalle $[1, 3]$. En tenant compte de la condition initiale $x \geq \frac{3}{2}$, on conserve donc comme solutions les éléments appartenant à $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$.
 - si $x \leq \frac{3}{2}$, on se ramène à $x^2 - 2x + 2 + 2x - 3 \leq 2$, soit $x^2 - 3 \leq 0$. C'est beaucoup plus simple, on doit simplement avoir $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. En tenant compte de la condition initiale, on garde donc l'intervalle $\left[-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right]$ (pour ceux qui en douteraient, $\sqrt{3} > \frac{3}{2}$).

Conclusion : $\mathcal{S} = [-\sqrt{3}, 3]$.

4. Faisons donc ce qu'on nous conseille si gentiment : $X = x + 2$, donc $x = X - 2$, le membre de gauche de l'équation devient donc $(X - 2)^3 + 5(X - 2)^2 - 9(X - 2) - 45 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 + 5X^2 - 20X + 20 - 9X + 18 - 45 = X^3 - X^2 - 17X - 15$. On est donc ramenés à l'équation $X^3 - X^2 - 17X - 15 = 0$, qui a pour racine évident $X = -1$, puisque $-1 - 1 + 17 - 15 = 0$. On peut donc factoriser sous la forme $X^3 - X^2 - 17X - 15 = (X + 1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (a+b)X^2 + (b+c)X + c$. L'identification des coefficients donne $a = 1$, puis $a + b = -1$, donc $b = -2$, $c + b = -17$, donc $c = -15$ (cohérent avec la dernière condition). Il reste à résoudre l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 60 = 64$, et admet donc comme racines $X_1 = \frac{2-8}{2} = -3$ et $X_2 = \frac{2+8}{2} = 5$. Il ne reste plus qu'à retrouver les valeurs de x correspondant aux trois valeurs obtenues pour X : comme $x = X - 2$, on obtient finalement $\mathcal{S} = \{-5, -3, 3\}$.