Devoir Commun : corrigé

PTSI Lycée Eiffel

16 janvier 2016

Exercice 1

1. L'équation (E_1) étant une équation homogène du premier ordre, il suffit de la normaliser puis de la résoudre directement : l'équation $y' - \dfrac{\alpha}{x}y = 0$ peut être résolue sur $]0, +\infty[$, et a pour solutions les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ke^{\alpha \ln(x)} = Kx^\alpha$, avec $K \in \mathbb{R}$. Un cas particulier tout de même : lorsque $\alpha = 0$, l'équation se ramène à $y' = 0$, et a pour solutions les fonctions constantes.
2. (a) Si la fonction h est deux fois dérivable, k l'est aussi comme composée de fonctions dérivables, et on peut calculer $k'(u) = e^u h'(e^u)$, puis $k''(u) = e^u h'(e^u) + e^{2u} h''(e^u)$.

   (b) Partons donc de l'équation $k'' - 2\alpha k' + \alpha^2 k = 0$, et remplaçons les expressions de k, k' et k'' par les formules données ci-dessus : $e^u h'(e^u) + e^{2u} h''(e^u) - 2\alpha e^u h'(e^u) + \alpha^2 h(e^u) = 0$. Il ne reste plus qu'à remplacer e^u par x, et on trouve l'équation équivalente $xh'(x) + x^2 h''(x) - 2\alpha x h'(x) + \alpha^2 h(x) = 0$. La fonction h est donc bien solution de l'équation (E_2) (et c'est une équivalence, on a aucun problème à remonter vers l'équation de départ.

   (c) L'équation équivalente obtenue est une équation du second ordre homogène à coefficients constants. Elle a pour équation caractéristique $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$, soit $(x - \alpha)^2 = 0$. On est dans le cas d'une racine double égale à α, les solutions sont donc toutes les fonctions de la forme $k(u) = (Au + B)e^{\alpha u}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Il ne reste plus qu'à remonter jusqu'aux fonctions solutions de l'équation initiale : si $x = e^u$, on aura $u = \ln(x)$, donc $h(x) = k(\ln(x)) = (A \ln(x) + B)e^{\alpha \ln(x)} = (A \ln(x) + B)x^\alpha$, avec toujours $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

1. La fonction f est définie si $x \neq 0$, et si $\ln(|x|) \neq 0$, soit $x \neq \pm 1$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$. Ce domaine de définition est symétrique par rapport par 0, et $f(x) = \dfrac{1}{-x\ln(|-x|)} = -\dfrac{1}{x\ln(|x|)}$, la fonction f est donc impaire. On peut restreindre son étude à l'ensemble $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, et la courbe représentative de f sera symétrique par rapport à l'origine du repère.
2. Puisque la valeur absolue ne s'annule pas sur le domaine de définition de f, $x \mapsto \ln(|x|)$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables, et f elle-même est ausi dérivable comme inverse et produit de fonction dérivables. Contentons-nous de considérer f sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, donc de prendre la forme $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ pour calculer la dérivée $f'(x) = -\dfrac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)}$, qui est de signe opposé à celui de $\ln(x) + 1$. La dérivée est donc positive sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$, et négative sur $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$ et sur $]1, +\infty[$. Concernant les limites, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée, et $x\ln(x) < 0$ à droite de 0 donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ (aucune difficulté ici non

plus). Dernière valeur à donner avant de dresser le tableau de variations : $f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$. On obtient le reste du tableau en utilisant l'imparité de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

3. La fonction f étant impaire, on peut se contenter de résoudre l'équation quand $x > 0$ (x est solution si et seulement si $-x$ est solution), ce qui nous ramène à l'équation $\ln(x) = \frac{1}{x}^2$. On peut par exemple poser $g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x^2}$ et étudier les variations de cette fonction sur $]0, +\infty[$. elle est dérivable, de dérivée $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2+2}{x^3}$ >0. Comme $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée) et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (pas de problème non plus), la fonction g est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, et l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. Comme celle-ci est différente de 1 (on constate que $g(1) = -1$, donc la solution est plus grande que 1), elle correspond à une unique valeur de x strictement positive vérifiant $f(x) = x$. Sur $\mathbb{R}$, il y a donc deux solutions, opposées l'une de l'autre.
4. C'est très similaire à ce qu'on a fait tout à l'heure : g est définie si $z \neq 0$ et si $|z| \neq 1$, c'est-à-dire si $z \notin \mathbb{U}$. Autrement dit, $\mathcal{D}_g = \mathbb{C}^* \backslash \{\mathbb{U}\}$.
5. Écrivons donc $z = re^{i\theta}$, on calcule alors $g(z) = \frac{1}{z \ln(r)} = \frac{1}{r \ln(r)} e^{-i\theta}$. Il faut distinguer deux cas : si $r > 1$, $\ln(r) > 0$, et $\frac{1}{r\ln(r)}$ est le module de $g(z)$, et $-\theta$ un de ses arguments. Mais si $r < 1$, il faut changer le signe : $g(z) = -\frac{1}{r\ln(r)} e^{i(\pi - \theta)}$, et $g(z)$ a pour module $-\frac{1}{r\ln(r)}$, et admet pour argument $\pi - \theta$.
6. Dans le cas où $|z| > 1$, on aura $g(z) = z$ si et seulement ces deux nombres ont même module et même argument modulo 2π, ce qui revient à dire que $\frac{1}{r\ln(r)} = r$, et $-\theta \equiv \theta[2\pi]$. Les valeurs possibles pour r sont donc les solutions de l'équation $f(x) = x$, ce qui n'en laisse en fait qu'une seule puisque $r > 0$. De plus, $\theta \equiv 0[pi]$, ce qui revient à dire que $z \in \mathbb{R}$. Les solutions sont donc les mêmes que pour l'équation $f(x) = x$ (il y en a donc deux).

Exercice 3

1. On obtient $u_1 = \frac{5}{2}$, $v_1 = \sqrt{4} = 2$, puis $u_2 = \frac{9}{4}$ et $v_2 = \sqrt{5}$.
2. On procède par récurrence. Au rang 0, les termes sont par définition strictement positifs. Supposons désormais u_n et v_n strictement positifs, alors $\frac{u_n + v_n}{2}$ et $u_n v_n$ sont strictement positifs, et donc u_{n+1} et v_{n+1} le sont aussi. Le principe de récurrence permet de conclure.
3. Pas besoin de récurrence ici ! Il suffit de calculer $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$. Comme de plus $u_0 \geq v_0$, l'inégalité est bien vérifiée pour tout entier naturel n.
4. Calculons $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$. D'après la question précédente, $v_n - u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante. De même, $v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \geq 0$ puisque $u_n \geq v_n$. La suite (v_n) est donc croissante.

5. L'inégalité de gauche a déjà été prouvée à la question 3. Pour l'égalité de droite, on a déjà constaté que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2$. Il suffit donc de multiplier en haut et en bas par $(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2$ et d'utiliser l'identité remarquable $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}) = u_n - v_n$ pour conclure.
6. La positivité du quotient découle encore une fois du fait que $u_n - v_n \geq 0$. Pour majorer par 1, on peut se ramener à l'inégalité $u_n - v_n \leq (\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2$ (tout est positif), soit $u_n - v_n \leq u_n + v_n + 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}$, ou encore $0 \leq 2v_n + 2\sqrt{u_n v_n}$, ce qui est évident.
7. Il n'y a qu'à combiner les deux résultats précédents : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2} \times \frac{u_n - v_n}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n)$.
8. Effectuons donc un raisonnement par récurrence. Pour $n = 0$, on a $u_0 - v_0 = 4 - 1 = 3$, et $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3$, donc l'inégalité est vérifiée. Supposons-là vraie au rang n. Alors, en appliquant le résultat de la question précédent, $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n - v_n) \leq \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (en appliquant cette fois l'hypothèse de récurrence). On obtient bien $u_{n+1} - v_{n+1} \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, et l'inégalité est donc vraie pour tout entier n.
9. On a déjà prouvé qu'une des suites était croissante et l'autre décroissante. De plus, $\lim_{n \to +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc une application du théorème des gendarmes à l'encadrement obtenu à la question précédente assure que $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$. Les deux suites sont bien adjacentes, et convergent donc vers une limite commune L.
10. Le réel x est une valeur approchée de L à 10^{-2} près si $|x - L| \leq 10^{-2}$.
11. Les monotonies respectives des deux suites permettent d'affirmer que, pour tout entier n, $v_n \leq L \leq u_n$, et donc que $u_n - v_n \geq u_n - L$. On peut donc être sûr que u_n est une valeur approchée de L à 10^{-2} près dès le moment où $u_n - v_n \leq 10^{-2}$, ce qui sera le cas si $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-2}$, ou encore $2^n \geq 300$. Cela se produit si $n \ln(2) \geq \ln(300)$, donc pour $n \geq \mathrm{Ent}\left(\frac{\ln(300)}{\ln(2)}\right) + 1$. Plus simplement, on constate aisément à la main que $2^n \geq 300$ à partir de $n = 9$ (puisque $2^8 = 256$ et $2^9 = 512$).
12. (a) En reprenant les valeurs calculées en début d'exercice, $w_0 = 3$, et $w_1 = 3 + \left(\frac{5}{2} - 2\right) = \frac{7}{2}$.
    (b) On peut se contenter de constater que $w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$, la suite est donc croissante.
    (c) La suite étant croissante, elle est certainement minorée par $w_0 = 3$. De plus, en additionnant les inégalités de la question 8, on trouve $\sum_{k=0}^{n} u_k - v_n \leq 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, soit $w_n \leq 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ (on a utilisé la formule du calcul d'une somme géométrique). Le membre de droite de cette inégalité peut être majoré trivialement par 6, donc (w_n) est bel et bien majorée, et bornée.
    (d) Puisque la suite est croissante et majorée, le théorème de convergence monotone assure sa convergence.
    (e) Le numérateur de la suite (t_n) est en fait bornée : $3 \leq w_n \leq 6$, et $0 \leq \arctan(n) \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n. On peut donc écrire que $0 \leq t_n \leq \frac{3\pi}{n+1}$, et une simple application du théorème des gendarmes assure que $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$.