Devoir Commun

PTSI Lycée Eiffel

16 janvier 2016

Durée : 3H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, les équations différentielles seront résolues sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on s'intéresse aux deux équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : xy' - \alpha y = 0$$

$$(E_2) : x^2y'' + (1-2\alpha)xy' + \alpha^2 y = 0$$

1. Résoudre l'équation (E_1) sur $]0,+\infty[$.
2. Soit h une fonction définie sur $]0,+\infty[$, et deux fois dérivable sur cet intervalle. Pour tout réel u, on pose $k(u) = h(e^u)$.
   (a) Exprimer $k'(u)$ et $k''(u)$ en fonction des dérivées première et seconde de la fonction h.
   (b) Montrer que h est solution de (E_2) si et seulement si $k'' - 2\alpha k' + \alpha^2 k = 0$ (on pourra poser $x = e^u$).
   (c) Résoudre cette dernière équation, puis en déduire les solutions de l'équation (E_2).

Exercice 2

On définit dans un premier temps une fonction numérique réelle $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(|x|)}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire ?
2. Dresser un tableau de variations complet de la fonction f sur tout son ensemble de définition (les limites et l'existence de f' devront être justifiées).
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas la valeur de ces solutions, mais une justification rigoureuse de leur nombre est attendue).

On définit désormais une fonction de la variable complexe par la même formule que précédemment : $g(z) = \dfrac{1}{z\ln(|z|)}$ (où $|z|$ désigne maintenant le module du nombre complexe z).

4. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ?
5. En écrivant z sous forme exponentielle, déterminer le module et un argument de $g(z)$ en fonction de ceux de z.
6. En déduire les solutions l'équation $g(z) = z$ lorsque $|z| > 1$.

Exercice 3

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} & = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} & = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2.
2. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont à termes trictement positifs.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq v_n$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et la suite (v_n) croissante.
5. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} \dfrac{(u_n - v_n)^2}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2}$.
6. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \dfrac{u_n - v_n}{(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2} \leq 1$.
7. Déduire des question précédentes que $0 \leq u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$.
8. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - v_n \leq 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
9. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note L leur limite commune.
10. Rappeler la définition d'une valeur approchée de L à ε près.
11. Donner une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de L à 10^{-2} près.
12. On définit maintenant une troisième suite (w_n) par $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k - v_k)$.
    (a) Calculer w_0 et w_1.
    (b) Étudier la monotonie de la suite (w_n).
    (c) En utilisant le résultat de la question 8, montrer que la suite (w_n) est bornée.
    (d) Montrer que la suite (w_n) converge (on ne demande pas sa limite).
    (e) Déterminer la limite de la suite (t_n) définie par $t_n = \dfrac{w_n \arctan(n)}{n+1}$.