Exercice 1

1. On est dans un cas complètement typique de loi uniforme. En l'occurrence, $X \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, 2n\})$. On peut réciter les résultats du cours : $E(X) = \dfrac{2n+1}{2}$, et $V(X) = \dfrac{4n^2-1}{12}$.

2. (a) On a assez clairement $P(U \leq i) = \dfrac{i}{2n}$, et de même pour $P(D \leq i)$ (il faut tirer un jeton parmi les i contenant un numéro inférieur ou égal à i). Or, $(Y \leq i) = (U \leq i) \cap (D \leq i)$. Les deux événements étant indépendants, $P(Y \leq i) = \dfrac{i^2}{4n^2}$.

   (b) L'événement $Y = i$ est réalisé lorsque $Y \leq i$ est réalisé, mais pas $Y \leq i-1$. Comme l'événement $Y \leq i-1$ est inclus dans l'événement $Y \leq i$, on a simplement $P(Y = i) = P(Y \leq i) - P(Y \leq i-1) = \dfrac{i^2}{4n^2} - \dfrac{(i-1)^2}{4n^2} = \dfrac{2i-1}{4n^2}$.

   (c) Il faut donc calculer $E(Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} iP(Y = i) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{2n} 2i^2 - i = \frac{1}{4n^2}\left(\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(2n+1)}{2}\right) = \frac{n(2n+1)}{2n^2}\left(\frac{4n+1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1)(8n+2-3)}{12n} = \frac{(2n+1)(8n-1)}{12n} = \frac{16n^2+6n-1}{12n}$.

3. (a) Pour avoir $Z = i$, il faut nécessairement tirer un numéro inférieur ou égal à n (n'importe lequel) au premier tirage, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Au deuxième tirage, il faut ensuite tirer le numéro i spécifiquement, ce qui se produit évidemment avec une probabilité $\dfrac{1}{2n}$. On a donc $P(Z = i) = \dfrac{1}{4n}$.

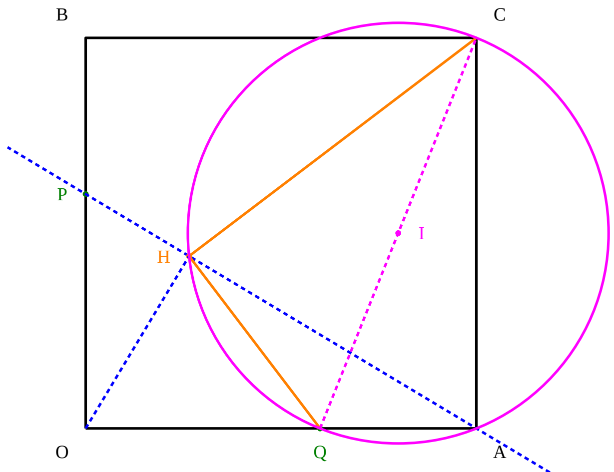
   (b) Il y a maintenant deux possibilités d'obtenir le numéro i : soit on le tire au premier tirage, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{1}{2n}$ (dans ce cas, il n'y aura pas de second tirage), soit on l'obtient au deuxième tirage, et la probabilité est alors la même qu'à la question précédente. Au total, on a donc $P(Z = i) = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n} = \dfrac{3}{4n}$.

   (c) Vérifions donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} P(Z = i) = 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{3}{4n} = \frac{n}{4n} + \frac{3n}{4n} = 1$.

   (d) Calculons donc : $E(Z) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{4n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{3i}{4n} = \frac{n+1}{8} + \frac{3}{4n}\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{8} + \frac{6n+3}{4} - \frac{3n+3}{8} = \frac{5n+2}{4}$. Si on veut la comparer à l'espérance de Y calculée plus haut, le plus logique est de calculer $E(Y) - E(Z) = \dfrac{16n^2+6n-1}{12n} - \dfrac{5n+2}{4} = \dfrac{16n^2+6n-1-15n^2-6n}{12n} = \dfrac{n^2-1}{12n}$. Manifestement, cette valeur est positive, ce qui prouve que $E(Y) \geq E(Z)$. Ce n'est pas très surprenant d'un point de vue intuitif.

Exercice 2

1. En voila une (avec ici un rapport $\dfrac{3}{5}$ entre la distance OP et le côté du carré).



2. Par définition du repère, on a $O(0,0)$, $A(1,0)$ et $B(0,1)$, puis $C(1,1)$ si on veut que $OACB$ soit un carré. On va noter a l'abscisse de Q, qui est par hypothèse égale à l'ordonnée de P. On peut donc écrire $P(0,a)$ et $Q(a,0)$. Un point $H(x,y)$ appartient à la droite (AP) si $\det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}) = 0$, soit $- \times y - a(x-1) = 0$, ou encore $ax + y = a$. De plus, le point H vérifie aussi, par définition, $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{OH} = 0$, soit $-x + ay = 0$, donc $x = ay$. On remplace dans l'équation de droite : $a^2 y + y = a$, soit $y = \dfrac{a}{a^2+1}$ et $x = \dfrac{a^2}{a^2+1}$. On a donc $H\left(\dfrac{a^2}{a^2+1}, \dfrac{a}{a^2+1}\right)$.
3. On calcule $\overrightarrow{QH}\left(\dfrac{a^2-a-a^3}{a^2+1}, \dfrac{a}{a^2+1}\right)$ et $\overrightarrow{HC}\left(\dfrac{1}{a^2+1}, \dfrac{a^2+1-a}{a^2+1}\right)$. Lorsqu'on calcule le produit scalaire, le numérateur vaut $a^2 - a - a^3 + a(a^2+1-a) = 0$, ce qui prouve bien que les droites sont perpendiculaires.
4. Pour les coordonnées de I, on fait simplement la moyenne de celles de Q et de C, soit $I\left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Une équation du cercle de diamètre $[QC]$ est $(x-x_Q)(x-x_I)+(y-y_Q)(y-y_I) = 0$, soit ici $(x-a)\left(x - \dfrac{a+1}{2}\right) + y\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = 0$. On peut bien sûr tout développer pour retrouver une équation développée, mais si on veut simplement obtenir le rayon du cercle, on calcule directement $IC = \sqrt{\dfrac{(1-a)^2}{4} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{a^2-2a+2}}{2}$. On peut donc montrer que H est sur le cercle en calculant
$$HI = \sqrt{\frac{(2a^2-(a^2+1)(a+1))^2}{4(a^2+1)^2} + \frac{(2a-(a^2+1))^2}{4(a^2+1)^2}} = \frac{\sqrt{(a^2-a^3-a-1)^2+(a^2-2a+1)^2}}{2(a^2+1)}$$
$$= \frac{\sqrt{a^4+a^6+a^2+1-2a^5-2a^3-2a^2+2a^4+2a^3+2a+a^4-4a^3+6a^2-4a+1}}{2(a^2+1)}$$
$$= \frac{\sqrt{a^6-2a^5+4a^4-4a^3+5a^2-2a+2}}{2(a^2+1)}.$$
Bon, ce calcul atroce n'a pas l'air très concluant, et pourtant, calculons à tout hasard $(a^2 - 2a+2)(a^2+1)^2 = (a^2-2a+2)(a^4+2a^2+1) = a^6+2a^4+a^2-2a^5-4a^3-2a+2a^4+4a^2+2 = a^6-2a^5+4a^4-4a^3+5a^2-2a+2$, et on se rend alors compte que $IC = HI$! Le point appartient bien au cercle, ce qui prouve en passant que le triangle QHC est rectangle en H, et donc que les droites (QH) et (HC) sont perpendiculaires.

Exercice 3

1. En effet, $S_k - S_{k-1} = \sum_{i=0}^{k} u_i - \sum_{i=0}^{k-1} u_i = u_k$. On peut alors calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k} - \frac{S_k}{k+1} - S_0 = \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)} - S_0 = \sum_{k=1}^{n} S_k k(k+1) - \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_n}{n} - S_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_n}{n+1} - S_0$.
2. Si la suite (S_n) est bornée, disons par exemple $|S_n| \leq A$ pour tout entier n, alors par inégalité triangulaire, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{A}{k(k+1)} + \frac{A}{n+1} + |S_0|$. Or, $\frac{A}{k(k+1)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{A}{k^2}$ est le terme général d'une série convergente, et les deux termes restants convergent également (le premier tend vers 0, le second est constant), ce qui prouve que la série de terme général $\frac{|u_k|}{k}$ est majorée par quelque chose de convergent, et donc convergente (elle est à termes positifs). Ceci prouve que la série de terme général $\frac{u_k}{k}$ est absolument convergente, donc convergente.
3. Il suffit de poser $u_n = \frac{1}{n}$. On sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente (et de limite $+\infty$), donc la suite (S_n) n'est pas bornée. Pourtant, $\sum \frac{u_n}{n} = \sum \frac{1}{n^2}$ est bien une série convergente (série de Riemann ici).
4. (a) Il suffit de remarquer que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ vaut -1 (lorsque n est impair) ou 0 (lorsque n est pair) pour constater que (S_n) est bornée. Les questions précédentes nous assurent alors que série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

   (b) Un calcul tout à fait classique, n'est-ce pas ? Le plus rapide est de passer par une partie réelle : $S_n(\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$
   $= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \times 2i \sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2i \sin(\frac{\theta}{2})}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\frac{n\theta}{2}} \sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right) = \frac{\cos(\frac{n\theta}{2}) \sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

   (c) Le seul cas qui pose probème dans le calcul précédent est celui où $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$, c'est-à-dire quand $\theta \equiv 0[2\pi]$. Dans ce cas, $\sum \frac{\cos(n)}{n}$ est la série harmonique, qui diverge comme chacun sait. Dans le cas général, le calcul précédent prouve que $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}$, donc la série est bornée. Les questions de début d'exercice assurent alors que $\sum \frac{\cos(n)}{n}$ converge (on prend $\theta = 1$ dans la question précédente). C'est exactement la même chose pour la deuxième série, avec cette fois-ci $\theta = 2$.

   (d) Comme tout le monde le sait depuis sa plus tendre enfance, $\cos(2n) = 1 - 2\sin^2(n)$, donc $\sin^2(n) = \frac{1 - \cos(2n)}{2}$. On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2k)}{k}$. D'après la question précédente, la deuxième somme converge vers une limite finie (peu importe sa valeur), alors que la première tend vers $+\infty$ (à une constante près, c'est la série harmonique). On en déduit que la série de terme général $\frac{\sin^2(n)}{n}$ diverge vers $+\infty$.

(e) On sait très bien que $\cos(2k) = 2\cos^2(k) - 1$, soit $\cos^2(k) = \dfrac{1+\cos(2k)}{2}$. Comme $\cos(k) \in [-1, 1]$, $|\cos(k)| \geq \cos^2(k)$, l'inégalité demandée en découle. Il suffit alors de faire exactement le même raisonnement qu'à la question précédente (avec une inagalité au lieu de l'égalité) pour en déduire que $\sum \dfrac{|\cos(n)|}{n}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 4

1. S'il n'y a qu'une seule boule blanche, on note simplement le numéro du tirage où la boule blanche est sortie, ce qui va simplement suivre une loi uniforme sur l'intervalle $\{1, \dots, n\}$.
2. Il y a donc quatre boules dans l'urne, deux blanches et deux noires. La dernière boule blanche ne peut pas être tirée avant le deuxième tirage, on a donc $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$. On aura $X = 2$ si on tire les deux boules blanches lors des deux premiers tirages, soit $P(X = 2) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$. On aura par ailleurs $X = 4$ si on tire une boule blanche lors du dernier tirage, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ puisqu'il y a autant de boules noires et de boules blanches dans l'urne au départ (le fait que ce soit le dernier tirage ne change rien, renverser le temps ne modifierait pas les probabilités à chaque tirage. On a donc $P(X = 4) = \dfrac{1}{2}$, et il reste $P(X = 3) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$. On peut bien sûr retrouver cette valeur en distinguant les deux tirages possibles : blanche, puis noire puis blanche, ou noire puis blanche puis blanche, de probabilité $\dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$ chacun.
   On calcule sans difficulté $E(X) = \dfrac{2}{6} + \dfrac{3}{3} + \dfrac{4}{2} = \dfrac{10}{3}$, puis $E(X^2) = \dfrac{4}{6} + \dfrac{9}{3} + \dfrac{16}{2} = \dfrac{35}{3}$. On applique alors la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{35}{3} - \dfrac{100}{9} = \dfrac{5}{9}$.
3. (a) Il faut au moins b tirages pour tirer toutes les boules blanches, donc $X(\Omega) = \{b, \dots, N\}$.

   (b) L'énoncé suppose implicitement que $k \geq b$ pour pouvoir tirer $b-1$ boules blanches en $k-1$ tirages. Il y a donc $\dbinom{N}{k-1}$ tirages au total, donc $\dbinom{b}{b-1} \times \dbinom{N-b}{k-b}$ convenables (on tire b boules blanches, et le reste de boules noires). Autrement dit, en notant A cet événement, $P(A) = \dfrac{b \times \dbinom{N-b}{k-b}}{\dbinom{N}{k-1}}$. Pour obtenir l'événement $X = k$, il faut que l'événement A soit réalise, puis qu'on tire une boule blanche au k-ème tirage alors qu'il n'y en a plus qu'une dans l'urne parmi $N-k+1$, ce qui se produit donc avec probabilité $\dfrac{1}{N-k+1}$. Finalement, $P(X = k) = \dfrac{b}{N-k+1} \times \dfrac{(N-b)!}{(k-b)!(N-k)!} \times \dfrac{(k-1)!(N+1-k)!}{N!} = \dfrac{b(N-b)!(k-1)!}{(k-b)!N!}$.
   Or, on calcule d'un autre côté $\dfrac{\dbinom{k-1}{b-1}}{\dbinom{N}{b}} = \dfrac{(k-1)!}{(b-1)!(k-b)!} \times \dfrac{b!(N-b)!}{N!} = \dfrac{b(k-1)!(N-b)!}{(k-b)!N!}$.
   On a bien $P(X = k) = \dfrac{\dbinom{k-1}{b-1}}{\dbinom{N}{b}}$.

   (c) On écrit la définition de l'espérance : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=b}^{k=N} k \times \frac{\dbinom{k-1}{b-1}}{\dbinom{N}{b}} = \frac{b}{\dbinom{N}{b}} \sum_{k=b}^{N} \binom{k}{b}$ en utilisant la formule sans nom. On en reste là ? Non, on peut calculer cette somme ! En effet, on sait que la somme de toutes les probabilités $P(X = k)$ est nécessairement égale à 1, ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{k=b}^{N} \binom{k-1}{b-1} = \binom{N}{b}$. En modifiant la valeur de b, on trouve alors $\displaystyle\sum_{k=b+1}^{N} \binom{k-1}{b} = \binom{N}{b+1}$, on peut maintenant décaler l'indice et obtenir enfin $\displaystyle\sum_{k=b}^{N-1} \binom{k}{b} = \binom{N}{b+1}$. Ce n'est pas exactement ce qu'on veut : $\displaystyle\sum_{k=b}^{N} \binom{k}{b} = \binom{N}{b+1} + \binom{N}{b} = \binom{N+1}{b+1}$ en utilisant la formule de Pascal (mais oui). On peut enfin conclure : $E(X) = \dfrac{b}{\binom{N}{b}} \times \binom{N+1}{b+1} = \dfrac{b(N+1)}{b+1}$ après simplification des factorielles.