# Devoir Surveillé n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

30 avril 2016

## Exercice 1

1. L'application $f$ va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, il n'y a qu'à prouver qu'elle est linéaire. Si $u(x,y,z)$ et $v - x', y', z')$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f(\lambda u + v) = (\lambda x + x' - \lambda y - y' + \lambda z + z', -\lambda x - x' + 3\lambda y + 3y' - 2\lambda z - 2z', -2\lambda x - 2x' + 6\lambda y + 6y' - 4\lambda z - 4z') = \lambda(x - y + z, -x + 3y - 2z, -2x + 6y - 4z) + (x' - y' + z', -x' + 3y' - 2z', -2x' + 6y' - 4z') = \lambda f(u) + f(v)$. Notre application est bien un endomorphisme.
2. Il faut résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y+ & & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ -2x & + & 6y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.$. Les deux dernières équations de ce système sont équivalentes, on garde donc simplement les conditions $y = x + z$, puis en remplaçant dans la deuxième équation $-x + 3x + 3z - 2z = 0$, soit $z = -2x$. On en défuit que $\ker(f) = \{(x, -x, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -1, -2))$. La famille constituée de l'unique vecteur $(1, -1, -2)$ est une base de $\ker(f)$.
3. On vient de voir que $\ker(f)$ était de dimension 1, le théorème du rang assure alors que $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - 1 = 2$. Par ailleurs, on sait que $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les images des vecteurs de la base canonique, soit $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1, -2), (-1, 3, 6), (1, -2, -4))$. Connaissant déjà la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, on sait qu'il doit y avoir une relation entre ces trois vecteurs. On peut par exemple constater que $(1, -1, -2) - (-1, 3, 6) = (2, -4, -8) = 2 \times (1, -2, -4)$ (on peut bien sûr écrire un système pour trouver ces coefficients). On peut donc écrire $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1, -2), (-1, 3, 6))$. Les deux vecteurs restants dans notre famille forment une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Manifestement, $(1, -1, -2) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $\mathrm{Vect}((1, -1, -2)) \subset \mathrm{Im}(f)$ (qui est un espace vectoriel), c'est-à-dire que $\ker(f) \subset \mathrm{Im}(f)$. Ces deux espaces ne peuvent être égaux puisqu'ils n'ont pas la même dimension.
5. On calcule $v = f(u) = (-1, 3, 6)$, puis $w = f(-1, 3, 6) = (-2, -2, 4)$. La famille $(u, v, w)$ étant constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de prouver qu'elle est génératrice pour prouver qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$ (on peut bien sûr aussi prouver qu'elle est libre, mais les calculs effectués ici vont servir à nouveau juste après). Soit donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche à écrire $(x, y, z) = au + bv + cw$, ce qui revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & b & - & 2c & = & x \\ a & + & 3b & - & 2c & = & y \\ & & 6b & + & 4c & = & z \end{array}\right.$. L'opération $2L_1 + L_3$ donne $4b = 2x + z$, soit $b = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}z$. On en déduit $c = \dfrac{1}{4}z - \dfrac{3}{2}b = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8}z$, et enfin $a = y - 3b + 2c = -3x + y - z$. Le système a toujours une solution, notre famille est bien génératrice, et donc une base, de $\mathbb{R}^3$.
6. Il suffit de reprendre les calculs précédents, en fixant successivement $x = 1$, puis $y = 1$ et $z = 1$ (et les autres coordonnées nulles à chaque fois). On obtient ainsi $(1, 0, 0) = \left(-3, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)_{\mathcal{B}}$ ; $(0, 1, 0) = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$ (ça, ce n'est pas une surprise, puisqu'il s'agit du vecteur $u$), et $(0, 0, 1) = \left(-1, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}\right)_{\mathcal{B}}$.

7. On constate sans trop se fatiguer que $f(w) = 0$, donc $f^3(u) = 0$. Mais alors $f^3(v) = f(f^3(u)) = 0$, et $f^3(w) = f^2(0) = 0$. L'application $f^3$ s'annule donc sur les trois vecteurs de la base $\mathcal{B}$, il s'agit nécessairement de l'application nulle.
8. On peut composer : $g^2 = (f + 3\,\mathrm{id})^2 = f^2 + 6f + 9\,\mathrm{id}$, puis $g^3 = (f + 3\,\mathrm{id})^3 = f^3 + 9f^2 + 27f + 27\,\mathrm{id} = 9f^2 + 27f + 27\,\mathrm{id}$ puisque $f^3 = 0$. Plus généralement, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $g^k = (3\,\mathrm{id} + f)^k = 3^n\,\mathrm{id} + n3^{n-1}f + \dfrac{n(n-1)}{2}3^{n-2}f^2$ (les termes suivants s'annulent tous).
9. On constate que $g^3 = 9f^2 + 27f + 27\,\mathrm{id} = 9(f^2 + 6f + 9\,\mathrm{id}) - 27f - 54\,\mathrm{id} = 9g^2 - 27(f + 2\,\mathrm{id}) = 9g^2 - 27g + 27\,\mathrm{id}$. On a donc $g^3 - 9g^2 + 27g = -27\,\mathrm{id}$, ou encore $-\dfrac{1}{27}g^3 + \dfrac{1}{3}g^2 - g = \mathrm{id}$. On peut factoriser à gauche par $g$ pour obtenir $g \circ \left(-\dfrac{1}{27}g^2 + \dfrac{1}{3}g - \mathrm{id}\right) = \mathrm{id}$, ce qui prouve que $g$ est un automorphisme, donc la réciproque est $g^{-1} = -\dfrac{1}{27}g^2 + \dfrac{1}{3}g - \mathrm{id}$.

# Exercice 2

1. L'application est certainement à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $f(\lambda M + N) = \dfrac{\lambda a + a' + \lambda d + d'}{2}I + \dfrac{\lambda b + b' + \lambda c + c'}{2}J = \lambda f(M) + f(N)$ avec les notations évidentes.
2. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}$. Le noyau de $f$ est donc constitué des matrices vérifiant $a + d = b + c = 0$, soit les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Puisque ce noyau est de dimension 2, le théorème du rang nous assure que l'image de $f$ sera aussi de dimension 2. Or, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(I, J)$, puisque $f(M)$ est par définition une combinaison linéaire des matrices $I$ et $J$. On a donc nécessairement $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(I, J)$ (qui est de dimension 2).
3. On a $M \in \ker(f - \mathrm{id}) \Leftrightarrow f(M) = M$, ce qui donne ici les équations $\dfrac{a+d}{2} = a$ et $\dfrac{b+c}{2} = b$, soit $d = a$ et $c = b$. On retrouve exactement la même famille génératrice $(I, J)$ que celle obtenue pour $\mathrm{Im}(f)$, les deux espaces sont donc égaux.
4. Les coefficients diagonaux de $f(f(M))$ sont tous deux égaux à $\dfrac{\frac{a+d}{2} + \frac{a+d}{2}}{2} = \dfrac{a+d}{2}$, et les deux autres à $\dfrac{\frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2}}{2} = \dfrac{b+c}{2}$. Ceci prouve que $f(f(M)) = f(M)$, donc que $f^2 = f$ et que $f$ est un projecteur.
5. On sait que $s = 2f - \mathrm{id}$, donc $s(M) = 2f(M) - M = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

# Exercice 3

1. La fonction arctan étant impaire, $f(-x) = \dfrac{-(x^2 + 1)\arctan(x)}{-x} = f(x)$, donc $f$ est paire.
2. On sait que $\arctan(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)$, donc $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2 + 1)\left(x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right) = 1 - \dfrac{1}{3}x^2 + x^2 + o(x^3) = 1 + \dfrac{2}{3}x^2 + o(x^3)$.
3. La fonction $f$ admettant un développement limité à l'ordre 1 en 0, elle y est prolongeable par continuité et dérivable. De plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc la tangente en 0 est horizontale

d'équation $y = 1$. Enfin, $f(x) - 1 \sim \dfrac{2}{3}x^2$ est positif au voisinage de 0, donc la courbe sera au-dessus de sa tangente dans un voisinage de 0.

4. C'est un calcul très classique, on pose par exemple $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$. La fonction $g$ est donc constante, et prend par exemple comme valeur $g(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

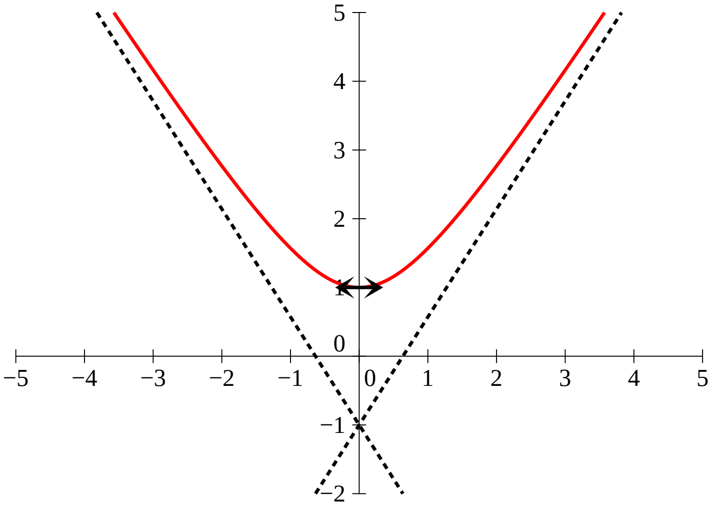
5. Commençons comme toujours par poser $X = \dfrac{1}{x}$, de façon à ce que $X$ tende vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$. On a alors $f(X) = \dfrac{(\frac{1}{X^2}+1)\arctan(\frac{1}{X})}{\frac{1}{X}} = \dfrac{(1+X^2)(\frac{\pi}{2} - \arctan(X))}{X}$ en utilisant la question précédente. On peut faire notre développement limité : $f(X) = \dfrac{1}{X}(1 + X^2)\left(\dfrac{\pi}{2} - X + \dfrac{1}{3}X^3 + o(X^3)\right) = \dfrac{\pi}{2X} + \dfrac{\pi}{2}X - 1 - X^2 + \dfrac{1}{3}X^2 + o(X^2) = \dfrac{\pi}{2X} - 1 + \dfrac{\pi}{2}X - \dfrac{2}{3}X^2 + o(X^2)$, soit $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \dfrac{\pi}{2}x - 1 + \dfrac{\pi}{2x} - \dfrac{2}{3x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. On observe bien la présence d'une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$, et $f(x) - \left(\dfrac{\pi}{2}x - 1\right) \sim \dfrac{\pi}{2x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe de $f$ sera donc au-dessus de son asymptote dans un tel voisinage. En $-\infty$, le calcul précédent n'est plus directement valable car la formule de la question précédente ne marche que pour des valeurs strictement positives de $x$, mais on peut simplement utiliser la parité de $f$ : on aura une asymptote oblique d'équation $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$, et la courbe sera également au-dessus de cette asymptote sur un voisinage de $-\infty$.

6. La fonction $h$ est définie et dérivable sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. On calcule $h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \dfrac{(x^2-1)^2 - (x^2+1)^2}{(x^2+1)(x^2-1)^2} = -\dfrac{4x^2}{(x^2+1)(x^2-1)^2}$. Cette dérivée est toujours négative. La fonction $h$ est donc strictement décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. On a par ailleurs $h(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -\infty$ (calcul sans difficulté), $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \dfrac{\pi}{2}$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |

7. Calculons donc la dérivée de la fonction $f$, qui est sûrement dérivable sur $\mathbb{R}^+$ : $f'(x) = \dfrac{2x^2\arctan(x) + x - (x^2+1)\arctan(x)}{x^2} = \dfrac{(x^2-1)\arctan(x) + x}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}h(x)$. La fonction $h$ est négative sur $[0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$, et $x^2 - 1$ également. Du coup, $f'(x)$ est positif sur chacun des deux intervalles, et $f$ est donc croissante.

8. On n'oublie pas les asymptotes et le fait que la fonction est paire :




## Exercice 4

1. Aucune des fonction $f_k$ ne peut être définie en 0 et en 4, valeurs pour lesquelles le ln du dénominateur n'est pas définie. La seule condition supplémentaire pouvant créer des valeurs interdites est l'annulation du dénominateur. Si $k = 0$, on doit avoir $\ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right| \neq 0$, donc $|x| \neq |x-4|$. Or, $|x| = |x-4|$ se produit si $x = x-4$, ce qui est impossible, ou $x = 4-x$, soit $x = 2$. On en déduit que $\mathcal{D}_{f_0} = \mathbb{R}\backslash\{0,2,4\}$. Si $k \neq 0$, on doit cette fois résoudre l'équation $\ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right| = -k$, soit $\dfrac{x}{x-4} = \pm e^{-k}$. On trouve donc $x = e^{-k}x - 4e^{-k}$, soit $x = \dfrac{4e^{-k}}{e^{-k}-1} = \dfrac{4}{1-e^k}$, ou $x = 4e^{-k} - xe^{-k}$, donc $x = \dfrac{4e^{-k}}{1+e^{-k}} = \dfrac{4}{e^k+1}$. Conclusion : $\mathcal{D}_{f_k} = \mathbb{R}\backslash\left\{0, 4, \dfrac{4}{1-e^k}, \dfrac{4}{1+e^k}\right\}$. Reste à classer les valeurs dans l'ordre : si $k > 0$, $e^k > 1$, donc $\dfrac{4}{1-e^k} < 0$, et $0 < \dfrac{4}{1+e^k} < 4$, donc on a dans ce cas $\dfrac{4}{1-e^k} < 0 < \dfrac{4}{1+e^k} < 4$. Au contraire, si $k < 0$, on aura $e^k < 1$, donc $\dfrac{4}{1-e^k} > 4$, et toujours $0 < \dfrac{4}{1+e^k} < 4$. Dans ce cas, $0 < \dfrac{4}{1+e^k} < 4 < \dfrac{4}{1-e^k}$.
2. En 0 comme en 4, le dénominateur de $f_k$ tend vers 0 (puisque le logarithme a une limite infinie dans les deux cas), et le numérateur tend au choix vers 0 ou 4, ce qui n'a guère d'influence : $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 4} f_k(x) = 0$. On peut effectivement prolonger par continuité en posant $f_k(0) = f_k(4) = 0$. Le taux d'accroissement de $f$ en 0 est alors donné par $\tau_0(h) = \dfrac{f_k(h)}{h} = \dfrac{4}{k + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|}$, dont on vient de voir qu'il avait une limite nulle en 0. La fonction $f_k$ est donc dérivable en 0 et sa courbe y admettra une tangente horizontale. Le taux d'accroissement de $f_k$ en 4 peut s'écrire $\tau_4(h) = \dfrac{4x}{k(x-4) + (x-4)\ln|x| - (x-4)\ln|x-4|}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 4} (x-4)\ln|x-4| = 0$. Les autres termes du dénominateur tendent aussi clairement vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 4} \tau_4(h) = \pm\infty$. La fonction n'est pas dérivable en 4 (on ne va pas s'embêter à chercher le signe des limites infinies, elles découleront de l'étude des variations de $f_k$).
3. Commençons par constater que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x-4} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right| = k$. Les limites en

$\pm\infty$ seront toujours infinies, et leur signe dépend de celui de $k$. Si $k=0$, on aura $\dfrac{x}{x-4} > 1$ au voisinage de $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = +\infty$ (et inversement en $-\infty$). Les limites de $f$ aux valeurs interdites autres que 0 et 4 sont toutes infinies puisque par définition le dénominateur y tend vers 0 mais pas le numérateur. Pour déterminer leur signe, il faut étudier $d_k(x) = k + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|$. On peut dériver : $d'_k(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{4}{x(4-x)}$. La fonction $d_k$ est donc décroissante sur $]-\infty, 0[$ et $]4, +\infty[$, et croissante sur $]0, 4[$. Sachant qu'elle s'annule en $\dfrac{4}{1+e^k} = \alpha$ et en $\dfrac{4}{1+e^k} = \beta$ et connaissant les positions de ces valeurs par rapport à 0 et 4, on peut distinguer les cas suivants :

- si $k > 0$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f_k(x) = -\infty$ (le numérateur est négatif, et le dénominateur aussi), $\lim\limits_{x\to\beta^+} f_k(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f_k(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f_k(x) = +\infty$.
- si $k < 0$, $\lim\limits_{x\to\alpha^-} f_k(x) = -\infty$ (le numérateur est positif, et le dénominateur négatif), $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f_k(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f_k(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\beta^+} f_k(x) = -\infty$.
- si $k = 0$, il n'y a que la valeur 2 à regarder, et $\lim\limits_{x\to 2^-} f_0(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f_0(x) = +\infty$.

4. Posons donc $X = \dfrac{1}{x}$, et calculons $f_0(X) = \dfrac{4}{X\ln\left|\dfrac{\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}-4}\right|} = \dfrac{4}{-X\ln(1-4X)}$ (on peut enlever les valeurs absolues, $X$ tend vers 0 quand on se rapproche de $+\infty$). On peut maintenant utiliser les développements limités : $f(X) = -\dfrac{4}{X(-4X - 8X^2 - \frac{64}{3}X^3 - 64X^4 + o(X^4))} = \dfrac{1}{X^2} \times \dfrac{1}{1 + 2X + \frac{16}{3}X^2 + 16X^3 + o(X^3)} = \dfrac{1}{X^2} \times \left(1 - 2X - \dfrac{16}{3}X^2 - 16X^3 + 4X^2 + \dfrac{64}{3}X^3 - 8X^3 + o(X^3)\right) = \dfrac{1}{X^2} - \dfrac{2}{X} - \dfrac{4}{3} - \dfrac{8}{3}X + o(X)$, soit $f(x) = x^2 - 2x - \dfrac{4}{3} - \dfrac{8}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
5. On fait le même genre de calcul dans le cas général, mais en plus barbare :
$f_k(x) = \dfrac{4}{X(k - \ln(1-4X))} = \dfrac{4}{kX(1 + \frac{4}{k}X + \frac{8}{k}X^2 + \frac{64}{3k}X^3 + o(X^3))}$
$= \dfrac{4}{kX}\left(1 - \dfrac{4}{k}X - \dfrac{8}{k}X^2 - \dfrac{64}{3k}X^3 + \dfrac{16}{k^2}X^2 + \dfrac{64}{k^2}X^3 - \dfrac{64}{k^3}X^3 + o(X^3)\right)$
$= \dfrac{4}{kX} - \dfrac{16}{k^2} + \dfrac{32(2-k)}{k^3}X - \dfrac{256(k^2-2k+3)}{3k^4}X^2 + o(X^2)$.
Lorsque $k \neq 2$, le dernier terme est inutile. La droite d'équation $y = \dfrac{4}{k}x - \dfrac{16}{k^2}$ est toujours asymptote oblique à la courbe, et la position relative dépend du signe de $\dfrac{2-k}{k}$. La courbe est donc localement au-dessus de l'asymptote si $k < 0$ ou $k > 2$, en-dessous si $k = 1$. Dans le cas particulier où $k = 2$, la droite d'équation $y = 2x - 4$ est asymptote oblique à la courbe, et le terme non nul suivant du développement est $-\dfrac{16}{x^2}$, la courbe est donc en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
6. On calcule simplement $f'_k(x) = \dfrac{4}{k + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right|} - \dfrac{4x(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-4})}{(k + \ln|\frac{x}{x-4}|)^2}$
$= \dfrac{4}{(k + \ln|\frac{x}{x-4}|)^2}\left(k + \ln\left|\dfrac{x}{x-4}\right| - 1 + \dfrac{x}{x-4}\right)$, ce qui donne bien l'expression souhaitée en regroupant $\dfrac{x}{x-4} - 1 = \dfrac{4}{x-4}$.
7. Dérivons la fonction $g_k$ pour obtenir $g'_k(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{4}{(x-4)^2} = \dfrac{(x-4)^2 - x(x-4) - 4x}{x(x-4)^2} =$

$\dfrac{x^2-8x+16-x^2+4x-4x}{x(x-4)^2} = \dfrac{8(2-x)}{x(x-4)^2}$. On calcule sans problème $g_k(2) = k-2$, et les limites aux différentes bornes de posent pas de problème. On peut alors dresser le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_k$ | $k$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $k-2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $k$ |

8. Si $k=0$, la fonction $g_k$ ne s'annule pas, et $f_k'$ non plus, ce qui donne un tableau qui ressemble à ceci :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_0$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

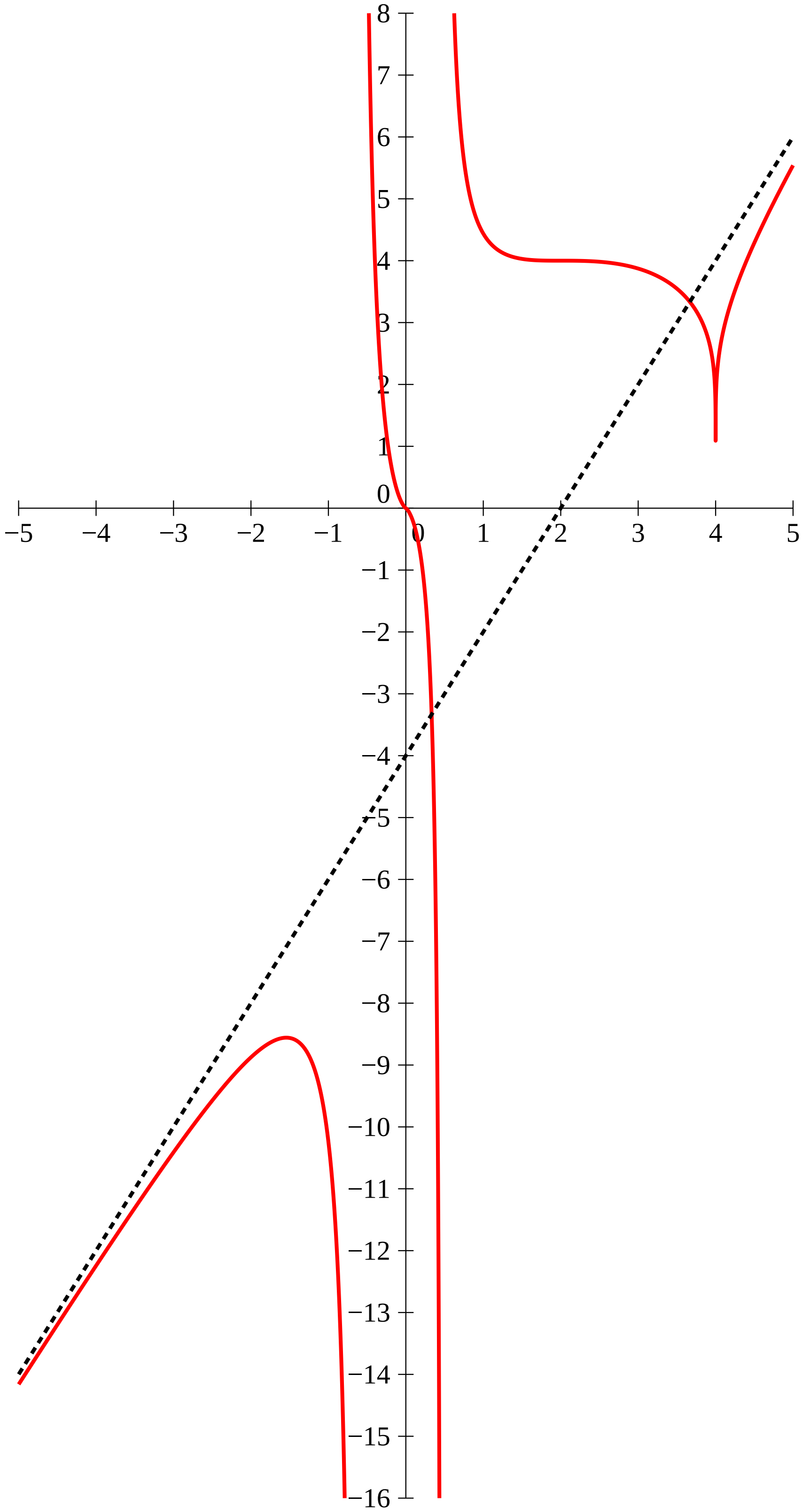
Si $k=2$, $g_k$ s'annule pour $x=2$, et pour une autre valeur $x_0$ qui est strictement inférieure à la valeur notée $\alpha$ plus haut dans l'énoncé (on peut calculer $g(\alpha)$ pour le vérifier), ce qui donne :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2$ | $-\infty$ | ↗ | $f(x_0)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Enfin, si $k>2$, ça devient carrément affreux puisque $g_k$ s'annule trois fois, en une première valeur $x_0<\alpha$, une deuxième $x_1$ comprise entre $\beta$ et 2, et une dernière $x_2$ comprise entre 2 et 4 :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $x_1$ | | $2$ | | $x_2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_k$ | $-\infty$ | ↗ | $f(x_0)$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(x_1)$ | ↗ | $\frac{8}{k}$ | ↗ | $f(x_2)$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

9. Voilà à quoi ça ressemble :



8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−13
−14
−15
−16
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5