Devoir Surveillé n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

19 mars 2016

Exercice 1

1. Ça commence tranquillement : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\ dx = \frac{\pi}{4}$.

   Un poil moins tranquille : $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx = [\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$.

2. On veut donc calculer $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\ dx$ en posant $t = \sin(x)$, soit $x = \arcsin(t)$ (c'est possible sur cet intervalle, puisque sin y est bijective). On est sur un intervalle où $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont tous les deux positifs, donc $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - t^2}$. De plus, $dx = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\ dt$, et les bornes de l'intervalle deviennent $\sin(0) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On peut donc écrire $I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1 - t^2}\ dt$. Reste à décomposer en éléments simples : $\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1 + t + 1 - t}{2(1 + t)(1 - t)} = \frac{1}{2(1 + t)} + \frac{1}{2(1 - t)}$ (oui, je sais, c'est à la limite de l'escroquerie, on peut aussi rédiger le calcul de façon plus classique). Donc $I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2(1 + t)} + \frac{1}{2(1 - t)}\ dt = \frac{1}{2}[\ln(1 + t) - \ln(1 - t)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right) = \frac{1}{2}\ln((\sqrt{2} + 1)^2) = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

3. Remarquons en passant que $I_0 \simeq 0.8$, et $\sqrt{2} + 1 \simeq 2.4$, ce qui est légèrement inférieur à e, donc I_1 doit être assez proche de 1 (mais inférieur), ce qui semble indiquer une suite croissante. Prouvons-le : sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 < \cos(x) \leq 1$, donc $1 \leq \frac{1}{\cos(x)}$. On en déduire que, pour tout entier n, $\frac{1}{\cos^n(x)} \leq \frac{1}{\cos^{n+1}}(x)$, et il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir l'inégalité $I_n \leq I_{n+1}$. La suite (I_n) est donc bien croissante.

4. Écrivons donc $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)}{(\cos(x)^{n+2}}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)}\ dx = I_{n+2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)\ dx}$. On va effectuer une IPP sur ce dernier morceau en posant $u(x) = \sin(x)$, donc $u'(x) = \cos(x)$, et $v'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}$, donc $v(x) = \frac{1}{(n + 1)\cos^{n+1}(x)}$. On trouve donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)\ dx} = \left[\frac{\sin(x)}{(n + 1)\cos^{n+1}(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(n + 1)\cos^n(x)}\ dx = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(n + 1) \times \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}} - \frac{I_n}{n + 1}$. Finalement, $I_n = I_{n+2} - \frac{(\sqrt{2})^n}{n + 1} + \frac{I_n}{n + 1}$, ce qui donne bien $I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n + 1} + \frac{nI_n}{n + 1}$.

5. Dans la mesure où $I_n \geq 0$ (on intègre une fonction positive), on peut déduire de la question précédente que $I_{n+2} \geq \frac{\sqrt{2}^n}{n + 1}$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n + 1} = 0$ par croissance comparée, ce qui suffit à

assurer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Exercice 2

1. Puisque x^2+1 ne s'annule jamais, $\dfrac{2x^2+3}{x^2+1} = x \Leftrightarrow 2x^2+3 = x^3+x$, ce qui est bien l'équation (E).
2. La fonction f est bien sûr de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Cette dérivée a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$, et $x_2 = \dfrac{4+2}{6} = 1$. On calcule $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3} - 3 = -\dfrac{77}{27} < 0$, et $f(1) = 1 - 2 + 1 - 3 = -3 < 0$. Les limites de f aux infinis sont immédiates, on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{77}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est toujours négative sur $]-\infty, 1]$, elle ne risque pas de s'annuler sur cet intervalle. De plus, elle est continue et strictement croissante de $[1, +\infty[$ vers $[-3, +\infty[$, donc s'y annule une seule fois. Globalement, l'équation $f(x) = 0$ admet bien une seule solution α. De plus, $f(2) = 8 - 8 + 2 - 3 = -1 < 0$ et $f(3) = 27 - 18 + 3 - 3 = 9 > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que f s'annule sur $[2, 3]$ et donc que $2 \leq \alpha \leq 3$.
3. Allons-y pour une (petite) division euclidienne : $2X^2 + 3 = 2(X^2+1) + 1$ (même pas besoin de la poser, on sait à l'avance que le quotient sera une constante !). On peut donc écrire $g(x) = \dfrac{2(x^2+1)+1}{x^2+1} = 2 + \dfrac{1}{x^2+1}$. La fonction g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et la nouvelle forme obtenue permet de calculer immédiatement $g'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, puis $g''(x) = \dfrac{-2(x^2+1)^2 + 2(2x)^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \dfrac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$.
4. Commençons par le tableau de variations de g, c'est plus facile : g' est du signe de $-x$, et g admet donc un maximum en $x = 0$, de valeur $g(0) = 3$. De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 2$ (quotient des termes de plus haut degré). On peut accessoirement remarquer que g est une fonction paire.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Passons à g', qui pour le coup est une fonction impaire. Le dénominateur de g'' est toujours positif, et son numérateur du signe de $3x^2 - 1$. En particulier, g'' s'annule pour $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (et sera négative uniquement entre ces racines). On calcule $g'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{1}{3}+1)^2} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \times \dfrac{9}{16} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. La valeur en $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ est obtenue par symétrie, et les limites aux infinies sont clairement nulles. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
g'	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	0

En particulier, g' est négative et croissante sur l'intervalle $[2, 3]$, donc sur cet intervalle, $|g'(x)| \leq |g'(2)| = \dfrac{4}{25} \leq \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$.

5. (a) La fonction g est décroissante sur $[2, 3]$, et $g(2) = \dfrac{11}{5} < 3$, et $g(3) = \dfrac{21}{10} > 2$, l'intervalle $[2, 3]$ est donc stable par g. Prouvons maintenant par récurrence que $u_n \in [2, 3]$: u_0 est dans l'intervalle par hypothèse, et si $u_n \in [2, 3]$, alors $g(u_n) = u_{n+1} \in [2, 3]$, ce qui achève la récurrence.

   (b) On souhaite évidemment appliquer l'IAF sur l'intervalle $[2, 3]$: la fonction $|g'|$ est majorée par $\dfrac{1}{6}$ sur cet intervalle, $u_n \in [2, 3]$, et on sait depuis les deux premiières questions de l'exercice que $\alpha \in [2, 3]$ et que $g(\alpha) = \alpha$. On peut donc écrire $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \dfrac{1}{6}|u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{6}|u_n - \alpha|$.

   (c) On enchaine avec la récurrence habituelle. Pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| = \alpha - 2 \leq 1$ puisque $\alpha \leq 3$. Si on suppose la propriété vraie au rang n, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{6}|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6^n} = \dfrac{1}{6^{n+1}}$ en appliquant le résultat de la question précédente puis l'hypothèse de récurrence. Une application évidente du théorème des gendarmes donne alors $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Problème

Première partie : à l'aide d'intégrales.

1. Pour la première intégrale, on effectue une IPP en posant $u(t) = t$, donc $u'(t) = 1$, et $v'(t) = \cos(kt)$, donc $v(t) = \dfrac{\sin(kt)}{k}$. On obtient $\displaystyle\int_0^\pi t\cos(kt)\ dt = \left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kt)}{k}\ dt = 0 - \left[-\frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$. Pour la deuxième intégrale, qu'on notera I_k, on effectue une première IPP en posant $u(t) = t^2$, donc $u'(t) = 2t$, et $v'(t) = \cos(kt)$, donc $v(t) = \dfrac{1}{k}\sin(kt)$. On obtient $\displaystyle I_k = \frac{1}{k}[t^2\sin(kt)]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi 2t\sin(kt)\ dt = -\frac{2}{k}\int_0^\pi t\sin(kt)\ dt$. Allez hop, on refait une IPP ! On pose $u(t) = t$, donc $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \sin(kt)$, donc $v(t) = -\dfrac{\cos(kt)}{k}$, et on trouve alors $\displaystyle I_k = \frac{2}{k^2}[t\cos(kt)]_0^\pi - \frac{2}{k^2}\int_0^\pi \cos(kt)\ dt = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2} - \frac{2}{k^3}[\sin(kt)]_0^\pi = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}$.
2. On peut faire une identification un peu lourdingue, mais ce n'est pas vraiment nécessaire : on prend $a = -1$ pour trouver le $\dfrac{1}{k^2}$, puis $b = \dfrac{1}{2\pi}$ pour annuler le terme faisant intervenir du $(-1)^k$: par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^\pi \left(-t + \frac{1}{2\pi}t^2\right)\cos(kt)\ dt = \frac{1 - (-1)^k}{k^2} + \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{k^2}$.
3. Toujours par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^\pi (at + bt^2)S_n(t)\ dt = \int_0^\pi at + bt^2\ dt + 2\sum_{k=1}^n \int_0^\pi (at +$

$bt^2)\cos(kt)\ dt = C + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, en posant $C = \int_0^\pi at + bt^2\ dt = \left[\frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{a\pi^2}{2} + \frac{b\pi^3}{3} = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{3}$.

4. On va bien sûr passer par les complexes pour simplifier le calcul : $\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}(e^{ikt}) = \mathrm{Re}(e^{it}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ikt})$. On reconnait une somme géométrique dont la raison est différente de 1 lorsque $t \not\equiv 0[2\pi]$. On peut alors écrire $\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\times\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{e^{i\frac{nt}{2}}(e^{-i\frac{nt}{2}}-e^{i\frac{nt}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}})}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\frac{-2i\sin(\frac{nt}{2})}{-2i\sin(\frac{t}{2})}\right) = \frac{\cos(\frac{(n+1)t}{2})\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$. Il est temps de sortir une des formules de trigonométrie qu'on préfère pour modifier le numérateur : la transformation produit-somme $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$, qui donne ici $\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{1}{2}\times\frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})-\sin(\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} - 1\right)$. La formule de l'énoncé en découle immédiatement, en multipliant par 2 et en ajoutant 1.

   Par ailleurs, on a manifestement $S_n(0) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}1 = 2n+1$.

5. Notons f la fonction en question, on peut écrire $f(t) = \frac{t(a+bt)}{\sin(\frac{t}{2})}$. Or, on sait que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$, donc $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 1$. En l'appliquant après avoir posé $x = \frac{t}{2}$ (qui tend bien vers 0), on en déduit que $\lim_{t\to 0}\frac{t}{2\sin(\frac{t}{2})} = 1$. On en déduit que $\lim_{t\to 0}f(t) = 2\times\lim_{t\to 0}(a+bt) = 2a = -2$. La fonction f est donc prolongeable en 0 en posant $f(0) = -2$. Pour savoir si la fonction prolongée est dérivable (et $\mathcal{C}^1$) en 0 (elle l'est certainement sur $]0,\pi]$ comme quotient de fonction usuelles), calculons $f'(t) = \frac{(a+2bt)\sin(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})(at+bt^2)}{\sin^2(\frac{t}{2})} = \frac{t^2}{\sin^2(\frac{t}{2})}\times\left(\left(\frac{2b\sin(\frac{t}{2})}{t} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \frac{a}{2t}\left(\frac{\sin(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}} - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)$. Le quotient de gauche tend vers 4 (on utilise toujours la même limite classique), la première parenthèse tend vers $b - \frac{1}{2}$, et la deuxième vers $1 - 1 = 0$. Hélas, il n'est pas évident du tout qu'elle continue à tendre vers 0 une fois multipliée par $\frac{a}{2t}$ (il y a une belle forme indéterminée), et l'indication donnée dans l'énoncé ne suffit pas à le prouver. On aurait en fait besoin d'un tout petit coup de développement limité pour s'en sortir proprement. En admettant que cette deuxième parenthèse disparaisse effectivement, on a une limite pour la dérivée en 0 égale à $4b - 2 = \frac{2}{\pi} - 2$, ce qui prouve bien que la fonction f est dérivable (et sa dérivée continue) en 0.

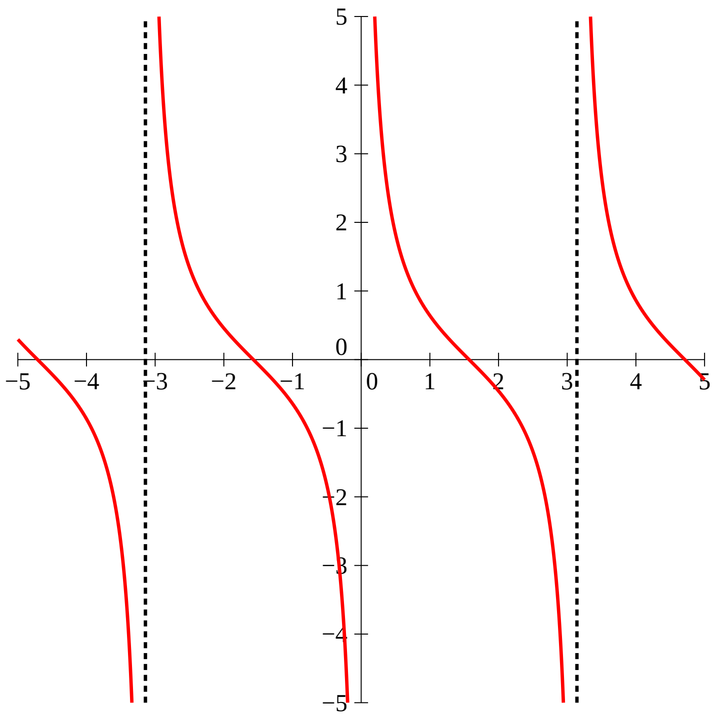
6. Effectuons donc une IPP en dérivant la fonction g (on a le droit car g est $\mathcal{C}^1$, d'où l'importance de cette hypothèse), et en posant $v'(t) = \sin(kt)$, et donc $v(t) = \frac{\cos(kt)}{k}$, pour obtenir $\int_0^\pi g(t)\sin(kt)\ dt = \left[\frac{g(t)\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi g'(t)\sin(kt)\ dt$. Le crochet tend clairement vers 0 puis son numérateur est majoré en valeur absolue par $|g(\pi)+g(0)|$ (une constante) et qu'on divise par k. Quand au second terme, on peut majorer ce qui se trouve dans l'intégrale par

$|g'(t)|$ (puisque $|\sin(kt)| \leq 1$, comme pour n'importe quel sinus), et donc toute l'intégrale par $\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^\pi |g'(t)|\,dt$, qui tend également vers 0 (c'est une constante divisée par k). On a bien prouvé ce qui était demandé.

7. D'après la question précédente, on peut affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt = 0$ (la fonction f étant celle de la question 5, qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur notre intervalle une fois prolongée). Autrement dit, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi S_n(t)(at+bt^2) = 0$, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(C + 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right) = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = -\frac{C}{2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Deuxième partie : en utilisant des polynômes.

1. La fonction est définie si $\sin(x) \neq 0$, donc sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun de ses intervalles de définition, π-périodique (comme dans le cas de la tangente, numérateur et dénominateur changent tous les deux de signe si on ajoute π à la variable), et impaire. Sa dérivée est $\text{cotan}'(x) = \dfrac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$, qui est toujours négatif. La fonction cotan est donc strictement décroissante sur $]0,\pi[$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty$, et $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\infty$ (le sinus étant positif mais le cosinus négatif à cet endroit), la fonction est donc bien bijective de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$. Une allure de la courbe représentative sur quelques périodes :



2. (a) Attention, les termes de plus haut degré vont se simplifier lors de la soustraction : d'après le binôme de Newton, $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}X^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}X^k(-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}X^k(1-(-1)^{n-k})$.

Le terme en X^n s'annule bel et bien, par contre, le terme en X^{n-1} devient $\binom{n}{n-1}X^{n-1}(1+1) = 2nX^{n-1}$. Le polynôme Q_n est donc de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2n$.

(b) Le polynôme Q_n s'annule lorsque $\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$ (il ne peut pas s'annuler pour $X = 1$ puisque $Q_n(1) = 2^n$). Autrement dit, on doit avoir $\frac{X+1}{X-1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, pour une certaine valeur de k appartenant à l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$. On obtient alors $X + 1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}}X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, soit $X = \frac{1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}$ (en supprimant la valeut $k = 0$ qui rend le dénominateur nul). En factorisant par l'angle moitié (qui se simplifie entre numérateur et dénominateur), cela donne $X = \frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{2\cos(\frac{k\pi}{n})}{2i\sin(\frac{k\pi}{n})} = -i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, avec $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, comme demandé par l'énoncé.

(c) Les valeurs de $\frac{k\pi}{n}$ étant des valeurs distinctes appartenant toutes à $]0, \pi[$ et la fonction cotan étant bijective sur cet intervalle, les racines sont toutes distinctes (et il y en a autant que le degré du polynôme Q_n). On peut donc écrire (sans oublier le coefficient dominant) : $Q_n = 2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

3. (a) Calculons donc $P_1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{3}{2k}X^k = 1+3X$, puis $P_2 = \sum_{k=0}^{2}\binom{5}{2k}X^k = 1+10X+5X^2$, et enfin $P_3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{7}{2k}X^k = 1 + 21X + 35X^2 + 7X^3$. Le seul calcul méritant d'être détaillé est celui de $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 7\times 5 = 35$.

(b) On écrit $Q_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^k(1-(-1)^{2n+1-k})$. Les valeurs impaires de k vont vérifier $1-(-1)^{2n+1-k} = 0$, et les valeurs paires verront au contraire cette même parenthèse prendre la valeur 2. Quitte à poser $k = 2j$, avec j prenant toutes les valeurs de 0 jusqu'à n, on trouve donc $Q_{2n+1}(X) = 2\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j}X^{2j}$, ce qui correspond exactement à $2P_n(X^2)$ (en remplaçant bien sûr le X^{2j} par $(X^2)^j$).

(c) On sait que $-i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ annule polynôme Q_{2n+1}, la relation précédente assure donc que le carré de chacune de ces valeurs, à savoir $-\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, est racine du polynôme P_n. Cela fait toutefois beaucoup trop de racines pour le polynôme P_n qui est de degré n. En fait, on peut constater que les valeurs de $-\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ sont deux à deux égales, quand on remplace k par $2n+1-k$, puisque $\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} = \pi - \frac{k\pi}{2n+1}$, et $\mathrm{cotan}(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} = -\mathrm{cotan}(x)$. Cette différence de signe disparait quand on élève au carré. On peut donc ne garder que les valeurs correspondant à des k compris entre 1 et n, et on obtient exactement n racines distinctes pour P_n (toutes ces valeurs correspondent à des cotangentes strictement positives, donc ont des carrés distincts). Les racines de P_n sont donc simples, puisqu'on en a trouvé n différentes.

(d) Les relations coefficients-racines nous assurent que la somme des racines d'un polynôme de degré n est égale à $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, a_k désignant le coefficient du terme de degré k dans le polynôme. Pour P_n, on a donc $a_n = \binom{2n+1}{2n} = 2n+1$, et $a_{n-1} = \binom{2n+1}{2n-2} = \frac{(2n+1)!}{(2n-2)!3!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$, et $\frac{-a_{n-1}}{a_n} = -\frac{n(2n-1)}{3}$. Ce qui correspond à la formule demandée puisque la somme des racines de P_n est égale à $\sum_{k=1}^{n} -\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

4. (a) Sur cet intervalle, posons $g(x) = \sin(x) - x$, qui a pour dérivée $g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. La fonction g est donc décroissante et $g(0) = 0$, elle est négative sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De même, en posant $h(x) =_t an(x) - x$, on a $h'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$, donc h est croissante et vérifie $h(0) = 0$, elle est positive sur ce même intervalle.

(b) Tous les termes de l'encadrement précédent étant positifs, on peut l'élever au carré pour obtenir $0 < \sin^2(x) \leq x^2 \leq \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$, puis prendre l'inverse en retournant les inégalités : $\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$. Le membre de gauche est bien égal à $\operatorname{cotan}^2(x)$, et $\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$.

(c) Appliquons donc : $\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1$, d'où $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$. On peut désormais sommer ces encadrement pour k variant de 1 à n, en utilisant bien entendu le résultat de la question 3.d pour simplifier les membre extrêmes : $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{n(2n+1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right)$. Regardons donc ce qui se passe quand n tend vers $+\infty$: en gardant les termes de plus haut degré, le membre de gauche tend vers $\frac{\pi^2}{3} \times \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; et le membre de droite aussi (le n ajouté n'influence pas le terme de plus haut degré) ! On a bien retrouvé que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. (a) Faisons donc une récurrence, puisqu'on nous le demande si gentiment. Lorsque $n = 1$, le membre de gauche est égal à z_1^2 et celui de droite aussi (la deuxième somme est vide), l'égalité est vérifiée. Supposons là vrai au rang n, alors $\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right)^2 = (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, en posant $A = \sum_{k=1}^{n} z_k$ et $B = z_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, $A^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i z_j$. De plus, $B^2 = z_{n+1}^2$, ce qui ajoute le terme manquant à la première somme du membre de droite, et $2AB = 2\sum_{i=1}^{n} z_i z_{n+1}$, ce qui ajoute exactement les termes manquants à la somme de droite pour que l'égalité soit vraie au rang $n+1$.

(b) Pour alléger les calculs, posons $z_k = \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. On sait déjà (question 3d) que

$\sum_{k=1}^{n} z_k = \frac{n(2n-1)}{3}$. En appliquant la formule obtenue à la question précédente, on obtient $\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - 2\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i z_j$. Reste à calculer la dernière somme double, en utilisant à nouveau les relations coefficients-racines. On sait que les complexes z_k sont les racines du polynôme P_n, donc $\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$ (avec les mêmes notations que précédemment). Reste à calculer $a_{n-2} = \binom{2n+1}{2n-4} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!} = \frac{n(n-1)(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{30}$. On a donc $2\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i z_j = \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}$, puis $\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}$.

(c) En reprenant le résultat de la question 4*b* et en l'élevant au carré, on a $\frac{\pi^4}{(2n+1)^4}\text{cotan}^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^4} \leq \frac{\pi^4}{(2n+1)^4}\left(1 + 2\,\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + \text{cotan}^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$. On termine de la même façon que plus haut, en additionnant, en remplaçant les sommes de cotangentes par la formule obtenue juste au-dessus, puis en appliquant le théorème des gendarmes. Ainsi, après somme, le membre de gauche de l'encadrement sera égal à $\frac{\pi^4}{(2n+1)^4}\left(\frac{n^2(2n-1)^2}{9} - \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}\right)$. En ne gardant que les termes de plus haut degré, on a pour limite $\frac{\pi^4}{16n^4}\left(\frac{4n^4}{9} - \frac{4n^4}{15}\right) = \frac{\pi^4}{4}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{15}\right) = \frac{\pi^4}{90}$. La limite du membre de droite est la même (les termes supplémantaires ne modifient pas le terme de plus haut degré), on conclut donc sur le superbe résultat suivant : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

(d) Allez, on est motivés, on recommence pour avoir la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^6}$? Non, vraiment, vous ne voulez pas ? Pour information, on trouverait $\frac{\pi^6}{945}$.