Devoir Surveillé n°6

PTSI B Lycée Eiffel

19 mars 2016

Exercice 1

On définit la suite (I_n) par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^n \, dx$.

1. Calculer les valeurs de I_0 et de I_2.
2. À l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$ puis d'une (petite) décomposition en éléments simples, calculer I_1.
3. Déterminer la monotonie de la suite (I_n). Peut-on en déduire quelque chose ?
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} I_n$ (on pourra par exemple écrire $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \, dx$, puis effectuer une IPP intelligente).
5. En déduire la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On cherche à déterminer dans cet exercice l'unique solution de l'équation $(E) : x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$. On définit pour cela deux fonctions par les équations $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$, et $g(x) = \dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. Étudier les variations de f et en déduire que (E) admet effectivement une unique solution α. Donner un encadrement de α par deux entiers successifs.
3. Effectuer la division euclidienne du polynôme $2X^2 + 3$ par $X^2 + 1$. En déduire une expression simplifiée de $g(x)$, puis les valeurs de $g'(x)$ et $g''(x)$.
4. Dresser les tableaux de variations de g' et de g, et prouver que, $\forall x \in [2, 3]$, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{6}$.
5. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [2, 3]$.
   (b) Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{6}|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{6^n}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Problème

Ce problème présente deux méthodes pour calculer la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Les deux parties du problème sont complètement indépendantes.

Première partie : à l'aide d'intégrales.

1. Soit k un entier naturel non nul. Calculer les valeurs des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos(kt) \, dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(kt) \, dt$.
2. En déduire deux constantes a et b (indépendantes de k) telles que $\displaystyle\int_0^{\pi} (at+bt^2)\cos(kt) \, dt = \frac{1}{k^2}$.

3. On pose $S_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que $\int_0^{\pi} (at+bt^2)S_n(t) = C + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, où C est une constante qu'on exprimera en fonction de a et de b.

4. Vérifier que, $\forall t \in]0,\pi]$, on a $S_n(t) = \dfrac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$. Que vaut $S_n(0)$?

5. Montrer que la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $t \mapsto \dfrac{at+bt^2}{\sin(\frac{t}{2})}$ est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (on pourra utiliser si besoin que $\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1}{2}$).

6. Montrer que, si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, alors $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{\pi} g(t)\sin(kt) = 0$ (on pourra effectuer une IPP).

7. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Deuxième partie : en utilisant des polynômes.

1. On définit la fonction cotangente (en abrégé cotan) par la formule $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Donner le domaine de définition, la périodicité, les variations sur une période, et une allure de courbe représentative pour cette fonction. On montrera en particulier que cotan est bijective de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$.

2. On définit pour tout entier $n \geq 1$ le polynôme $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.
   (a) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
   (b) Prouver que les racines de Q_n sont les nombres $-i\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, pour $n \in \{1, 2\dots, n-1\}$.
   (c) Montrer que ces racines sont simples, et donner la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.

3. On définit désormais un nouveau polynôme (toujours pour $n \geq 1$) par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.
   (a) Donner les expressions explicites des polynômes P_1, P_2 et P_3.
   (b) Montrer que $2P_n(X^2) = Q_{2n+1}(X)$.
   (c) En déduire les racines de P_n, et vérifier qu'elles sont simples.
   (d) Que vaut la somme des racines du polynôme P_n ? En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \dfrac{n(2n-1)}{3}$.

4. (a) Montrer que, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.
   (b) En déduire que, sur le même intervalle, $\operatorname{cotan}^2(x) \leq \dfrac{1}{x^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$.
   (c) Appliquer l'encadrement précédent à $x = \dfrac{k\pi}{2n+1}$, et en déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k^2}$, puis la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

5. En complément, on peut obtenir presque sans effort supplémentaire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$:
   (a) Montrer par récurrence que, si $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$, alors $\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} z_i z_j$.
   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^4$ (on pensera aux relations coefficients-racines dans le polynôme P_n).
   (c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$.