Devoir Surveillé n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 février 2016

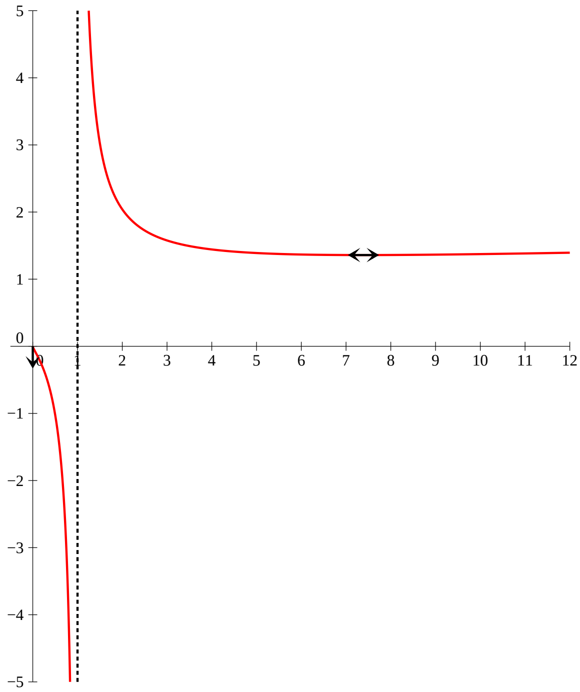
Exercice 0

La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, il y aura une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Par contre, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée), on peut donc prolonger la fonction par continuité en posant $f(0) = 0$. Le taux d'accroissement de f en 0 est alors donné par $\tau(h) = \dfrac{f(h)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}\ln(h)}$. On sait que $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{h}\ln(h) = 0$ (là, c'est de la croissance comparée), et $\ln(h) < 0$ au voisinage de 0, donc $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h) = -\infty$. La fonction prolongée n'est donc pas dérivable en 0, mais la courbe y admettra une tangente verticale.

Restent à étudier les variations de f : $f'(x) = \dfrac{\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\ln^2(x)} = \dfrac{\ln(x) - 2}{2\sqrt{x}\ln^2(x)}$ est du signe de son numérateur $\ln(x) - 2$. En particulier, la dérivée s'annule pour $x = e^2$, et $f(e^2) = \dfrac{e}{2}$. La seule limite restant à calculer est la suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. On peut dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$\frac{e}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Puis on obtient la courbe suivante :



Exercice 1

1. Inutile de calculer la moindre dérivée, on sait que l'exponentielle est croissante que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{nx}$ est décroissante, donc g_n est croissante sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} g_n(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$ (aucune forme indéterminée), et la fonction g_n est bien sûr continue, elle est donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier s'annule une seule fois sur cet intervalle.
2. L'inégalité $u_n > 0$ est évidente. De plus, $g_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, puisque $e^{\frac{1}{n}} > e^0 = 1$. La fonction g_n étant strictement croissante, on en déduit que $u_n < \dfrac{1}{n}$. Une application immédiate du théorème des gendarmes donne alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. On calcule donc $g_{n+1}(x) - g_n(x) = e^x - \dfrac{1}{(n+1)x} - e^x + \dfrac{1}{nx} = \dfrac{-n+n+1}{n(n+1)x} = \dfrac{1}{n(n+1)x}$. Cette expression est manifestement positive sur notre intervalle, ce qui implique que $g_{n+1}(u_{n+1}) - g_n(u_{n+1}) > 0$. Comme $g_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ par définition de la suite, on a donc $g_n(u_{n+1}) < 0$, et en particulier $g_n(u_{n+1}) < g_n(u_n)$. La fonction g_n étant toujours croissante, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, et la suite (u_n) est donc décroissante.
4. Par définition, $g_n(u_n) = 0$, donc $e^{u_n} - \dfrac{1}{nu_n} = 0$. Autrement dit, $nu_n = \dfrac{1}{e^{u_n}} = e^{-u_n}$. Comme on sait que la suite (u_n) tend vers 0, on en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$.

Exercice 2

1. On peut par exemple citer le sous-ensemble $\{1, 4\}$. Un sous-ensemble isolé de E_5 ne peut pas contenir plus de trois éléments, puisque chaque élément dans un sous-ensemble isolé est nécessairement suivi dans E_5 d'un élément qui ne sera pas dans ce sous-ensemble isolé. Si 1 appartient au sous-ensemble, 2 ne peut pas y être, puis si on met 3, 4 ne peut pas y être etc. De façon générale, on peut se convaincre assez facilement que le plus grand sous-ensemble

isolé de E_n contient Ent $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ éléments (ou si on préfère $\frac{n}{2}$ si n est pair, et $\frac{n+1}{2}$ si n est impair).

Il existe évidemment un seul sous-ensemble isolé à 0 éléments de E_5 ne contenant pas d'éléments (le sous-ensemble vide), donc $I_5^0 = 1$. Tous les sous-ensembles à un seul élément sont isolés, donc $I_5^1 = 5$ (il faut juste choisir l'élément). Le cas le plus compliqué est celui des sous-ensembles à deux éléments. Autant compter à la main ceux qui sont isolés : $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$ et $\{3, 5\}$ (alternativement, il y a au total $\binom{5}{2} = 10$ sous-ensembles à 2 éléments dans E_5, et parmi ceux-ci, quatre sont constitués de deux éléments consécutifs). Autrement dit, $I_5^2 = 6$. Enfin, $I_5^3 = 1$ car seul le sous-ensemble $\{1, 3, 5\}$ convient.

2. On aura toujours $I_n^0 = 1$ (le seul sous-ensemble possible est le sous-ensemble vide), $I_n^1 = n$ puisque les n sous-ensembles de E_n à un élément sont tous isolés, et enfin $I_n^n = 0$ (sauf si $n = 1$) puisque le seul sous-ensemble de E_n à n éléments est E_n lui-même, qui n'est pas isolé lorsque $n \geq 2$.

3. Bien entendu, $I_n^2 = 0$ si $n = 1$, ce qui est cohérent avec la formule donnée. Supposons donc que $n \geq 2$, il y a alors au total $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ sous-ensembles à deux éléments de E_n. Un sous-ensemble à deux éléments est isolé sauf s'il est constitué de deux entiers consécutifs. Or, il existe exactement $n-1$ sous-ensembles contitués de deux entiers consécutifs : $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, ..., $\{n-1, n\}$. Ce qui laisse donc $I_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) == \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, comme prévu par l'énoncé.

4. (a) Si on suppose que notre partie ne contient pas n'entier $n+1$, on peut donc l'identifier à un sous-ensemble de E_n, qui sera forcément isolé. Le nombre de parties isolées ne contenant pas $n+1$ est donc exactement I_n^p.

   (b) Si notre partie contient l'entier $n+1$, alors elle ne peut pas contenir n. Le reste de la partie est donc inclus dans E_{n-1}, et constitue forcément un sous-ensemble isolé de E_{n-1} (sinon la partie ne serait pas isolée dans E_{n+1}). Attention tout de même, elle ne contient que $p-1$ éléments puisqu'on ajoute ensuite l'entier $n+1$. Réciproquement, toute partie isolée de E_{n-1} à $p-1$ éléments peut être complétée en une partie isolée à p éléments de E_{n+1} en lui rajoutant l'entier $n+1$. On en déduit que les parties isolées de E_{n+1} contenant $n+1$ sont au nombre de I_{n-1}^{p-1}.

   (c) Il suffit tout simplement de dire que toute partie isolée de E_{n+1} fait partie d'une deux catégories disjointes suivantes : soit elle contient $n+1$, soit elle ne le contient pas ; et d'appliquer les résultats des deux questions précédentes.

5. Allons-y pour un joli petit tableau :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=0$	1			
$n=1$	1	1		
$n=2$	1	2		
$n=3$	1	3	1	
$n=4$	1	4	3	
$n=5$	1	5	6	1
$n=6$	1	6	10	4

6. (a) Prouvons simplement cette formule par récurrence sur l'entier n (p étant donc un entier fixé supérieur ou égal à 1). Lorsque $n = p-1$ (la plus petite valeur de n possible), la formule stipule que $\binom{p-1}{p-1} = \binom{p}{p}$, ce qui est vrai (les deux membres sont égaux à 1. Supposons la formule vraie au rang n, et calculons le membre de gauche pour $n = 1$: on peut

l'écrire $\displaystyle\sum_{k=p-1}^{n+1}\binom{k}{p-1}=\sum_{k=p-1}^{n}\binom{k}{p-1}+\binom{n+1}{p-1}=\binom{n+1}{p}+\binom{n+1}{p-1}$ par hypothèse de récurrence. D'après la formule de Pascal, cette expression est égale à $\dbinom{n+2}{p}$, ce qui prouve exactement l'hérédite de notre récurrence. La formule est donc vraie pour tout entier $n \geq p-1$.

(b) Personne n'a semblé se rendre compte lors du DS qu'il y avait un souci dans l'énoncé : les valeurs de i dans la somme de droite sont toujours plus grandes que $p-1$, il devrait donc y avoir du I_i^{p-1} dans la somme et pas le contraire ! Pour $p=2$, la formule stipule que $\displaystyle I_{n+1}^2=\sum_{i=1}^{n-1} I_i^1$. Or, on sait bien que $I_i^1=i$ quelle que soit la valeur de i, donc on obtient $\displaystyle I_{n+1}^2=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, ce qui est vrai. Pour la formule générale, le plus simple est de procéder par récurrence sur n, en posant comme propriété P_n : $\forall p \in \{2,\dots,n-1\}$, $\displaystyle I_n^p=\sum_{i=p-1}^{n-2} I_i^{p-1}$. L'initialisation se fait trivialement au rang 2, puisqu'il n'y a rien à prouver (le calcul effectué précédemment ne sert à rien pour la récurrence). Si on souhaite vérifier au rang 3, la seule formule est $I_3^2=I_1^1+I_2^1$, qui est vraie également. Supposons désormais P_n vraie, et choisissons un entier p quelconque tel que $2 \leq p \leq n$, on peut alors écrire en utilisant la question 4.c que $I_{n+1}^p=I_n^p+I_{n-1}^{p-1}$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à I_n^p (on ne touche pas à I_{n-1}^{p-1}) pour obtenir alors $\displaystyle I_{n+1}^n=\sum_{i=p-1}^{n-2} I_i^{p-1}+I_{n-1}^{p-1}=\sum_{i=p-1}^{n-1} I_i^{p-1}$, exactement ce qu'on voulait.

(c) En effet, $\displaystyle\binom{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}=I_n^2$. Utilisons alors la question précédente pour écrire $\displaystyle I_n^3=\sum_{i=2}^{n-2} I_i^2=\sum_{i=2}^{n-2}\binom{i-1}{2}=\sum_{i=2}^{n-3}\binom{i}{2}$ (le terme est nul pour $i=1$ et on peut décaler les autres). On reconnait exactement une somme de la forme de celles calculées à la question 6.a, et cette somme est donc égale à $\dbinom{n-2}{3}$, donc $I_n^3=\dbinom{n-2}{3}$ (quand cela a un sens). On fait exactement la même chose pour la formule suivante : $\displaystyle I_n^4=\sum_{i=3}^{n-2} I_i^3=\sum_{i=3}^{n-2}\binom{i-2}{3}=\sum_{i=3}^{n-4}\binom{i}{3}=\binom{n-3}{4}$.

(d) On conjecture évidemment $I_n^p=\dbinom{n-p+1}{p}$. Cette formule ne peut avoir de sens que si $p \leq n-p+1$, c'est-à-dire $p \leq \text{Ent}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$, ce qui est exactement la longueur maximale d'une partie isolée de E_n (ça tombe bien). La formule se démontre très simplement par récurrence sur n (en supposant qu'elle marche quelles que soient les valeurs convenables de p). On a déjà initialisé pour les premières valeurs de n, et pour passer de n à $n+1$, il suffit d'écrire $\displaystyle I_{n+1}^p=\sum_{i=p-1}^{n-1} I_i^{p-1}=\sum_{i=p-1}^{n-1}\binom{i-p+2}{p-1}=\binom{n-p+2}{p}$, ce qui est bien la formule souhaitée.

Exercice 3

I. Calcul à l'aide de suites.

1. Lorsque $p = 1$, la matrice A est simplement la matrice identité, on a donc $A^n = I$ quelle que soit la valeur de n. Pour $p = 0$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $A^3 = A^2$. Toutes les puissances suivantes seront donc égales à A^2.
2. Allons-y : $A^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 2p(1-p) & p^2 & 0 \\ (1-p)^2 & 1-p^2 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} p^3 & 0 & 0 \\ 3p^2(1-p) & p^3 & 0 \\ (1+2p)(1-p)^2 & 1-p^3 & 1 \end{pmatrix}$ (après légères simplifications des coefficients).
3. On va évidemment procéder par récurrence. La propriété est trivialement vraie au rang 0 en posant $a_0 = b_0 = c_0 = 0$, et accessoirement au rang 1 avec $a_1 = c_1 = 1 - p$ et $b_1 = 0$. Supposons la propriété vraie au rang n et écrivons $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ a_n & p^n & 0 \\ b_n & c_n & 1 \end{pmatrix} \times A =$ $\begin{pmatrix} p^{n+1} & 0 & 0 \\ pa_n + p^n(1-p) & p^{n+1} & 0 \\ pb_n + (1-p)c_n & pc_n + 1 - p & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est bien de la forme souhaitée, avec les relations de récurrences suivantes : $a_{n+1} = pa_n + p^n(1-p)$; $b_{n+1} = pb_n + (1-p)c_n$ et $c_{n+1} = pc_n + 1 - p$.
4. La suite (c_n) est une suite arithmético-géométrique. Son équation de point fixe $x = px + 1 - p$ a pour solution $x = 1$. Posons donc $v_n = c_n - 1$, et constatons que $v_{n+1} = c_{n+1} - 1 = pc_n - p = p(c_n - 1) = pv_n$. La suite auxiliaire (v_n) est donc féométrique de raison p, et de premier terme $v_0 = c_0 - 1 = -1$. On en déduit que $p_n = -p^n$, puis $c_n = 1 + v_n = 1 - p^n$ (ce qui est très cohérent avec ce qu'on a obtenu pour les matrices A^2 et A^3).
5. En décalant la relation obtenue plus haut, $a_{n+2} = pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p)$, donc $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2 a_n = p^2 a_n - pa_{n+1} + p^{n+1}(1-p) = p^2 a_n - p^2 a_n - p^{n+1}(1-p) + p^{n+1}(1-p) = 0$, comme voulu. La suite (a_n) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x^2 - 2px + p^2 = (x-p)^2$ admet une racine double égale à p, donc $a_n = (A + Bn)p^n$. Avec les conditions initiales, $a_0 = 0 = A$, et $a_1 = 1 - p = (A + B)p$, donc $A = 0$ et $B = \dfrac{1-p}{p}$. Finalement, $a_n = n(1-p)p^{n-1}$ (pour $n \geq 1$), ce qui est encore une fois très cohérent avec les premières puissances calculées.
6. (a) Si on note a, b, c, d, e, f, g, h et i les neuf coefficients de la matrice M, la condition $MU = U$ se traduit très simplement par les équations $a + b + c = d + e + f = g + h + i = 1$. Autrement dit, la somme des coefficients sur chacune des lignes de la matrice M doit être égale à 1. On constate que, dans la matrice A, la somme des coefficients de chaque colonne est égale à 1. Sa transposée est donc bien un élément de l'ensemble E.
   (b) C'est complètement trivial : si $MU = NU = U$, alors $(MN)U = M(NU) = MU = U$, donc $MN \in E$.
   (c) C'est une récurrence triviale : c'est vrai pour $n = 0$ (la matrice identité est certainement un élément de E), et si on suppose que ${}^tA^n \in E$, en la multipliant par ${}^tA$ qui appartient à E, on obtient une matrice qui appartient à E, donc ${}^tA^{n+1} \in E$. Or, la première ligne de la matrice ${}^tA^n$ correspond à la première colonne de la matrice A^n, elle est donc constituée des réels p^n, a_n et b_n. On en déduit que $a_n + b_n + p^n = 1$, donc $b_n = 1 - p^n - a_n = 1 - p^n - n(1-p)p^{n-1} = 1 + (n-1)p^n - np^{n-1}$.

II. Calcul à l'aide d'une décomposition astucieuse.

1. Chouette, une question triviale ! Même pas besoin de calculer pour constater que $B + C = A$.
2. On calcule facilement $C^2 = 0$. La matrice C est donc nilpotente.
3. Quelle que soit la méthode utilisée, le calcul est vraiment trivial (il y a deux opérations à faire pour finie le pivot par exemple). Si on aime les systèmes comme moi, on trouve les équations $x + y = a$, $-y = b$ et $-x + z = c$ qui donnent immédiatement $y = -b$ puis $x = a - y = a + b$ et $z = c + x = a + b + c$. Autrement dit, P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. Commençons par calculer D : $BP = \begin{pmatrix} p & p & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ -p & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (surprise, la matrice D est diagonale !). Trivialement, $D^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. Commençons par prouver par récurrence que $B^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai au rang 0 et surtout au rang 1 puisque $D = P^{-1}BP$. Supposons la formule vraie au rang n, alors $B^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve l'hérédité. Reste à calculer $PD^n = \begin{pmatrix} p^n & p^n & 0 \\ 0 & -p^n & 0 \\ -p^n & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $B^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 1 - p^n & 1 - p^n & 1 \end{pmatrix}$
6. L'énoncé a l'air de nous inciter très fortement à utiliser la formule du binôme de Newton. Avant de le faire, on n'oublie pas de vérifier que les matrices commutent : $BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p(1-p) & 0 & 0 \\ -p(1-p) & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et CB donne la même chose. On peut alors écrire $A^n = (C + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k B^{n-k}$. La matrice C étant nilpotente, seuls les deux premiers termes de la somme sont non nuls : $A^n = B^n + nCB^{n-1}$. Calculons $CB^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 \\ p-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & p^{n-1} & 0 \\ 1 - p^{n-1} & 1 - p^{n-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (1-p)p^{n-1} & 0 & 0 \\ (p-1)p^{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à faire une petite addition pour retrouver $A^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ n(1-p)p^{n-1} & p^n & 0 \\ 1 - p^n + n(p-1)p^{n-1} & 1 - p^n & 1 \end{pmatrix}$. C'est exactement ce qu'on avait trouvé à la première partie.