Devoir Surveillé n°3

PTSI B Lycée Eiffel

4 décembre 2015

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Les quatre questions de cet exercice sont complètement indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^t + 2e^{2t}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $ty'' - y' - t^3y = 0$ en posant $y(t) = z(t^2)$.
3. Résoudre l'équation différentielle $t^2y'' - 2ty' + (2 - t^2)y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $y(t) = tz(t)$.
4. Après en avoir trouvé une racine imaginaire pure simple, résoudre complètement l'équation $z^3 + (2 + 2i)z^2 + (3i - 2)z + 5 + 5i = 0$.

Exercice 2

On considère dans les plan complexe les points $A(-1 - i)$, $B(1 - i)$ et $C(-1 + i\sqrt{5})$.

1. Vérifier que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Donner l'expression complexe de l'unique similitude f vérifiant $f(B) = A$ et $f(A) = C$.
3. Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.
4. On note Ω le centre de la similitude f.
   (a) Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$.
   (b) Montrer que les points B, C et Ω sont alignés.
5. On note D l'image de C par la similitude f.
   (a) Montrer que A, Ω et D sont alignés.
   (b) Montrer que les droites (CD) et (AB) sont parallèles, et que $CD = 3 + \sqrt{5}$.
6. On note E le projeté orthogonal de B sur la droite (CD).
   (a) Calculer l'affixe du point E.
   (b) On note $F = f(E)$, quelle est la nature du quadrilatère $BFDE$?
7. Faire une figure (où on placera bien sûr tous les points définis dans cet exercice, ainsi que les droites et autres ensembles remarquables croisés lors des calculs).

Exercice 3

On considère dans cet exercice l'équation différentielle $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$. Pour tout réel λ, on note f_λ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_\lambda(x) = \dfrac{\ln(x)+\lambda}{1+x^2}$, et par $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative correspondante.

1. Sur quel(s) intervalles peut-on résoudre l'équation ?
2. Résoudre complètement l'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que, si un point M du plan a pour coordonnées (α, β), avec $\alpha > 0$, il existe une unique courbe $\mathcal{C}_\lambda$ passant par la point M.
4. Calculer la dérivée f'_λ de la fonction f_λ, et prouver qu'elle est du même signe que $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln(x) + \lambda)$.
5. Étudier les variations de la fonction g_λ. On notera m_λ l'unique solution de l'équation $g_\lambda(x) = 0$ (qu'on ne cherchera pas à calculer).
6. Dresser le tableau de variations complet de f_λ. On prouvera en passant que $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$.
7. Étudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_\lambda$, puis représenter dans un même repère une allure des courbes intégrales $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{-1}$ et $\mathcal{C}_1$.

Exercice 4

On considère l'application $g : z \mapsto \dfrac{z-2i}{z+2}$.

1. Quel est le domaine de définition de l'application g (on est dans $\mathbb{C}$, bien entendu) ?
2. Déterminer les images par g de $2+2i$ (sous forme algébrique), de $1+3i$ (on donnera la forme algébrique et la forme exponentielle) et de $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (uniquement sous forme exponentielle).
3. Déterminer les antécédents éventuels de 0, puis de i.
4. Montrer que g est une application bijective de son ensemble de définition vers un ensemble à déterminer.
5. Résoudre l'équation $g(z) = \dfrac{z}{2}$, puis l'équation $g(z) = z$.
6. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lequels $g(z) \in \mathbb{R}$.
7. Soit z un nombre complexe de module 2 distinct de -2.
   (a) En écrivant $z = 2e^{i\theta}$, prouver que $g(z) = e^{\frac{3i\pi}{4}} \times \dfrac{\sin(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$.
   (b) En déduire que $g(z)$ appartient toujours à une droite que l'on précisera.