Devoir Surveillé n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 novembre 2015

Exercice 1

1. Notons S la somme à calculer, on peut écrire $S = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} 2i - 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times (j(j+1) - j) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Plusieurs façons de procéder ici. On peut revenir aux définitions du cours et tenter de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ en fonction de y. Cette équation s'écrit $\frac{x^2-1}{x^2+1} = y$, soit $x^2 - 1 = yx^2 + y$, ou encore $x^2(1-y) = 1 + y$, donc $x^2 = \frac{1+y}{1-y}$. Cette équation admet (au moins) une solution lorsque $\frac{1+y}{1-y} \geq 0$, c'est-à-dire pour $y \in [-1, 1[$. La fonction f n'est donc pas sujective puisque, par exemple, 2 n'adet pas d'antécédent par f. Elle n'est pas non plus injective car la plupart des réels de l'intervalle $[-1, 1[$ (tous sauf -1 en fait) admettent deux antécédents par f. Ce n'est pas une surprise dans la mesure où l'application f est une fonction paire.
   Autre méthode possible : dresser le tableau de variations de f. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$, qui est du signe de x. Les calculs de limites ne posent aucun problème en faisant le quotient des termes de plus haut degré et on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

   à partir duquel on conclut facilement.
   Pour rendre f bijective, il suffit de choisir un intervalle sur lequel elle est strictement monotone, par exemple $I = [0, +\infty[$, et on a alors $J = [-1, 1[$.

3. On constate que $\cos(x)\sin^2(x)$ est presque de la forme $u'u^2$, ce qui donne envie de faire une IPP en posant $u'(x) = \cos(x)\sin^2(x)$, et donc $u(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x)$; et $v(x) = x$, donc $v'(x) = 1$. On obtient $I = \left[\frac{1}{3}x\sin^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\ dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\ dx$. Reste à gérer le $\sin^3(x)$, par exemple en se rappelant la formule de triplication $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$, ce qui implique $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$. On peut continuer le calcul : $I = \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin(x) - \frac{1}{12}\sin(3x)\ dx = \frac{\pi}{6} - \left[-\frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{36}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{36} = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$.

4. (a) Une méthode possible est de calculer la tangente du membre de droite à l'aide de la formule d'addition des tangentes : $\tan(\arctan(x+1)-\arctan(x)) = \dfrac{x+1-x}{1+x(x+1)} = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ (rappelons aux plus étourdis d'entre vous qu'on peut toujours simplifier $\tan(\arctan(x))$). Les deux membres ont donc la même tangente. De plus, on sait que x^2+x+1 est toujours positif (il a un discriminant négatif, ce qui prouve d'ailleurs l'existence du membre de gauche sur $\mathbb{R}$ tout entier), donc l'angle de gauche appartient à l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. À droite, $\arctan(x+1)$ et $\arctan(x)$ sont évidemment compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$, et $\arctan(x+1) > \arctan(x)$ puisque la fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que l'angle de droite est compris entre 0 (strictement) et π. Deux angles compris entre 0 et π ayant la même tangente sont égaux, on peut donc conclure que $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1)-\arctan(x)$.

Autre méthode : on pose brutalement $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) - \arctan(x+1) + \arctan(x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}}{1+\frac{1}{(x^2+x+1)^2}} - \dfrac{1}{1+(x+1)^2} + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{-2x-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} - \dfrac{1}{x^2+2x+2} - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{-2x-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} + \dfrac{x^2+2x+2-x^2-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} = 0$. Miracle, la fonction f est constante. Comme $f(0) = \arctan(1) - \arctan(1) + \arctan(0) = 1$, on en déduit que f est la fonction nulle, ce qui prouve l'égalité souhaitée.

(b) Maintenant, c'est facile puisqu'il y a un télescopage évident : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1)$. Quand n tend vers $+\infty$, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$ (limite de la fonction arctan en $+\infty$).

Exercice 2

1. On calcule donc $P_1 = 2$ (il n'y a qu'un seul terme dans le produit), puis $P_2 = P_1 \times \left(1+\dfrac{1}{4}\right) = 2\times\dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{2}$; $P_3 = P_2 \times \left(1+\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{5}{2}\times\dfrac{10}{9} = \dfrac{25}{9}$; et enfin $P_4 = P_3 \times \left(1+\dfrac{1}{16}\right) = \dfrac{25}{9}\times\dfrac{17}{16} = \dfrac{425}{144}$.

2. (a) Le plus simple est de poser $f(x) = \ln(1+x) - x$. La fonction f est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x}$. La fonction f est donc croissante sur $]-1,0]$ puis croissante sur $[0,+\infty[$, avec pour maximum $f(0)=0$. Elle est donc toujours négative, ce qui prouve l'inégalité souhaitée.

(b) Le membre de droite peut s'écrire $\dfrac{k-(k-1)}{(k-1)k} = \dfrac{1}{k^2-k}$. Comme $O < k^2-k \leq k^2$, on en déduit immédiatement que $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

(c) Constatons que $\ln(P_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$. En utilisant la première majoration prouvée après avoir isolé le terme numéro 1 (pour lequel la deuxième inégalité ne sera pas exploitable), $\ln(P_n) \leq \ln(2) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$. On enchaine avec la deuxième inégalité : $\ln(P_n) \leq$

$\ln(2) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leq \ln(2) + 1 - \frac{1}{n}$ en télescopant. A fortiori, $\ln(P_n) \leq \ln(2) + 1$, donc $P_n \leq e^{1+\ln(2)} = 2e$.

3. (a) Le plus simple, quoiqu'un peu brutal, est de faire la différence des teres et de regarder le signe du résultat obtenu : $\frac{k^2}{(k-1)(k+1)} - 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^4 - (k^2-1)k^2 - (k^2-1)}{(k-1)(k+1)k^2} = \frac{1}{k^2(k^2-1)}$, qui est bien positif pour tous les entiers k supérieurs ou égaux à 2.

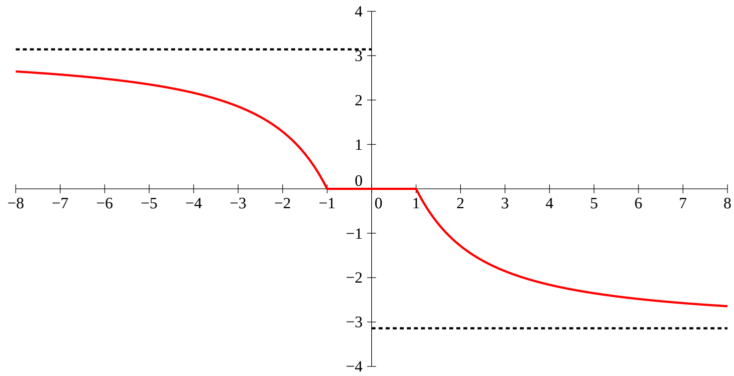
   (b) On va majorer directement les termes du produit P_n (à partir du numéro 2) à l'aide de l'inégalité précédente : $P_n \leq 2 \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} = 2 \times \frac{n!^2}{\prod_{k=1}^{n-1} k \times \prod_{k=3}^{n+1} k} = 2 \times \frac{n!^2}{(n-1)! \times \frac{(n+1)!}{2}} = 4 \times \frac{n}{n+1} \leq 4$. On a donc prouvé la deuxième majoration, qui est évidemment meilleure que la première puisque $2e > 4$.

Exercice 3

1. Puisque l'exercice est quasiment le même que le dernier du DM2, je vais me permettre de reprendre mon corrigé. Ici, la fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, la seule condition pour que x appartienne au domaine de définition de f est $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$, ou encore $-1 - x^2 \leq 2x \leq 1 + x^2$ (on peut multiplier par $1 + x^2$ qui est toujours positif). Autrement dit, on doit avoir simultanément $-1-2x-x^2 \leq 0$, soit $-(1+x)^2 \leq 0$, ce qui est toujours vrai ; et $1-2x+x^2 \geq 0$ soit $(1-x)^2 \geq 0$, ce qui est toujours vrai aussi. Finalement, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Qui plus est, la fonction f est impaire, on peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Calculons : $f(0) = 0$ (on sait que f est impaire !), $f(1) = \arcsin(1) - 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = 0$, et $f(\sqrt{3}) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$.
3. La dérivée existe si $f(x) \notin \{-1, 1\}$, ce qui ne se produit que si $x = -1$ ou $x = 1$ (voir les calculs de la première question). Quand elle est définie, on peut écrire $f(x) = \arcsin(u(x)) - 2\arctan(x)$ avec $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, et on peut calculer $u'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, puis $f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4+2x^2-4x^2}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} - \frac{2}{1+x^2}$.
4. Si $x \in [-1, 1]$, $1 - x^2 \geq 0$, et $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$. La fonction f est donc constate sur $[-1, 1]$, et même nulle sur cet intervalle vu les valeurs calculées plus haut.
5. Si $x \geq 1$, on a désormais $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = -\frac{4}{1+x^2}$, donc $f(x) = -4\arctan(x) + k$. La constante k est par exemple obtenue en regardant pour $x = \sqrt{(3)}$: $-\frac{\pi}{3} = -4 \times \frac{\pi}{3} + k$, donc $k = \pi$, et $f(x) = \pi - 4\arctan(x)$.
6. On sait que la fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui donne facilement les variations de la fonction f. On utilise aussi l'imparité pour compléter le tableau, la seule chose restant à calculer est la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. On l'obtient sans problème avec la forme initiale ou avec la forme simplifiée : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\pi$. D'où le tableau complet suivant :

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
g	π	$\searrow$	0	$\rightarrow 0 \rightarrow$	0	$\searrow$	$-\pi$

Et voila la courbe :



Exercice 4

1. Par définition, g_1 est une primitive de $1 \times 1 = 1$, donc de la forme $g_1(x) = x + k$. De plus, $\displaystyle\int_0^1 g_1(x)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} + kx\right]_0^1 = \frac{1}{2} + k$, et cette intégrale doit être nulle, donc $k = -\frac{1}{2}$, et $g_1(x) = x - \frac{1}{2}$.
Ensuite, g_2 est une primitive de $2g_1$, donc de la forme $x^2 - x + k$ (j'utilise la même notation k pour toutes les constantes). Or, $\displaystyle\int_0^1 g_2(x)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + kx\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + k$, donc $k = \frac{1}{6}$, ce qui correspond bien à la formule annoncée.

2. On utilise exactement la même méthode, g_3 est une primitive de $3g_2(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$, donc $g_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + k$, et $\displaystyle\int_0^1 g_3(x)\ dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} + kx\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + k = k$, donc $k = 0$, et $g_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.
On enchaine : g_4 est une primitive de $4g_3(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$, donc $g_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + k$, et $\displaystyle\int_0^1 g_4(x)\ dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + kx\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + k$, donc $k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{15 - 10 - 6}{30} = -\frac{1}{30}$, et $g_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$.

3. Puisque g_p est une primitive de pg_{p-1}, on peut écrire $g_p(1) - g_p(0) = [g_p(x)]_0^1 = \displaystyle\int_0^1 pg_{p-1}(x)\ dx$, et cette intégrale est nulle par hypothèse lorsque $p - 1 \geq 1$, ce qui prouve bien que $g_p(1) = g_p(0)$ pour $p \geq 2$.

4. On a évidemment $g_0(1) = 1$, et $g_1(1) = \frac{1}{2}$ en utilisant la formule obtenue pour g_1. Ensuite, on exploite la question précédente : $g_2(1) = g_2(0) = \frac{1}{6}$, puis $g_3(1) = g_3(0) = 0$ et $g_4(1) = g_4(0) = -\frac{1}{30}$.

5. Notons $f_p(x) = g_p(x+1) - g_p(x)$, et prouvons par récurrence la propriété $P_p : f_p(x) = px^{p-1}$. On va initialiser à $p = 1$ (l'énoncé était imprecis sur ce point) : $f_1(x) = g_1(x+1) - g_1(x) = x + \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1$, ce qui est bien égal à $1 \times x^0$. Supposons désormais la propriété vraie au rang p, on peut alors calculer $f'_{p+1}(x) = g'_{p+1}(x+1) - g'_{p+1}(x) = (p+1)g_p(x+1) - (p+1)g_p(x)$ par définition des fonctions g_p. Par hypothèse de récurrence, on a donc $f'_{p+1}(x) = (p+1)px^{p-1}$, donc en primitivant $f_{p+1}(x) = (p+1)x^p + k$. Comme on sait que $f_{p+1}(0) = g_{p+1}(1) - g_{p+1}(0) = 0$, la constante est nulle et la propriété est vérifiée au rang $p+1$, elle est donc vraie pour tout entier $p \geq 1$.

6. (a) On a $S_n(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$, puis $S_n(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (b) C'est trivial en utilisant les questions précédentes : $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{g_{p+1}(k+1) - g_{p+1}(k)}{p+1} = \frac{g_{p+1}(n+1) - g_{p+1}(1)}{p+1}$ par télescopage.

   (c) On calcule donc $S_2(p) = \frac{1}{3}(g_3(n+1) - g_3(1)) = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) - 0\right) = \frac{(n+1)}{6}(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1) = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, formule qui devrait vaguement vous rappeler quelque chose (n'oublions pas que par définition, $S_2(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$).

   De même, $S_n(3) = \frac{1}{4}(g_4(n+1) - g_4(1)) = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2 - \frac{1}{30} + \frac{1}{30}\right) = \frac{(n+1)^2((n+1)^2 - 2(n+1) + 1)}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, encore une formule normale pour $S_n(3) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

   (d) On est repartis pour un (dernier) tour : g_5 est une primitive de $5g_4(x) = 5x^4 - 10x^3 + 5x^2 - \frac{1}{6}$, donc $g_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x + k$, et $\displaystyle\int_0^1 g_5(x)\,dx = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12} + kx\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{12} + k$, donc $k = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 0$, donc $g_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$. On en déduit que $S_n(4) = \frac{1}{5}(g_5(n+1) - g_5(0)) = \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - \frac{5}{2}(n+1)^4 + \frac{5}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{6}(n+1)\right)$
   $= \dfrac{(n+1)(6(n+1)^4 - 15(n+1)^3 + 10(n+1)^2 - 1)}{30}$
   $= \dfrac{(n+1)(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 45n^2 - 45n - 15 + 10n^2 + 20n + 10 - 1)}{30}$,
   soit $S_n(4) = \dfrac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$. Reste à factoriser $6n^3 + 9n^2 + n - 1$. Incroyable mais vrai, $-\frac{1}{2}$ est racine de ce polynôme : $-\frac{6}{8} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = 0$ (pas de surprise, puisque l'énoncé nous annonçait une factorisation par $2n+1 = 2(n + 1\frac{1}{2})$). On peut donc écrire $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(an^2 + bn + c) = 2an^3 + (a+2b)n^2 + (b+2c)n + c$. Par identification, on trouve $2a = 6$, donc $a = 3$; puis $a + 2b = 9$, donc $b = \frac{9-a}{2} = 3$; et enfin $b + 2c = 1$ donc $c = \frac{1-b}{2} = -1$, ce qui est confirmé par le fait que $c = -1$ pour le coefficient

constant. On peut donc écrire finalement $S_n(4) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$. La dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 9 + 12 = 21$, les racines vont être trop moches pour que ça vaille le coup de factoriser. Conclusion : on a donc prouvé que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.