Devoir Surveillé n°2

PTSI B Lycée Eiffel

10 novembre 2015

Durée : 2H50. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Les questions de ce premier exercice sont indépendantes.

1. Calculer et simplifier $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{2i-1}{j}$.
2. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Déterminer des intervalles I et J les plus grands possibles tels que la restriction de f à I soit une bijection de I sur J.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\sin^2(x)\, dx$.
4. (a) Prouver que, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan(x+1) - \arctan(x)$.
   (b) En déduire la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$.

1. Calculer les valeurs de P_1, P_2, P_3 et P_4.
2. On souhaite majorer le produit P_n.
   (a) Montrer que, $\forall x \geq -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.
   (b) Montrer que, $\forall k \geq 2$, l'inégalité suivante est vérifiée : $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
   (c) Déduire des deux résultats précédents que $P_n \leq 2e$ (on pourra commencer par majorer $\ln(P_n)$).
3. On va désormais obtenir par une autre méthode une nouvelle majoration de P_n.
   (a) Montrer que, $\forall k \geq 2$, on a $1 + \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.
   (b) En déduire que $P_n \leq 4$. Cette majoration est-elle meilleure que la précédente ?

Exercice 3

On pose dans tout cet exercice $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$.

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction f, puis un ensemble d'étude intelligent pour f.
2. Calculer les valeurs $f(0)$, $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$.
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f, après avoir précis les valeurs pour lesquelles cette dérivée existe.
4. Simplifier l'expression de f sur l'intervalle $[-1, 1]$.
5. Montrer que, $\forall x \geq 1,\ f(x) = \pi - 4\arctan(x)$.
6. Donner la tableau de variations complet de f, puis tracer une allure de sa courbe représentative.

Exercice 4

On définit sur $\mathbb{R}$ une suite de fonctions g_p de la façon suivante : g_0 est la fonction constante égale à 1 ; pour tout entier $p \geq 1$, on impose $g_p' = pg_{p-1}$, et de plus $\displaystyle\int_0^1 g_p(x)\ dx = 0$.

1. Vérifier que $g_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$, puis $g_2(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{6}$.
2. Déterminer les valeurs de $g_3(x)$ et $g_4(x)$.
3. Montrer que, $\forall p \geq 2$, $g_p(0) = g_p(1)$.
4. Préciser les valeurs de $g_p(1)$, pour p compris entre 0 et 4.
5. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_p(x+1) - g_p(x) = px^{p-1}$.
6. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.
   (a) Rappeler les valeurs de $S_n(0)$ et $S_n(1)$.
   (b) Montrer que $S_n(p) = \dfrac{1}{p+1}(g_{p+1}(n+1) - g_{p+1}(1))$.
   (c) Retrouver à l'aide de la question précédente les valeurs de $S_n(2)$ et $S_n(3)$.
   (d) Calculer une expression de g_5, en déduire la valeur de $S_n(4)$, puis factoriser l'expression obtenue (on devrait en particulier réussir à factoriser par $2n+1$).