Devoir Surveillé n°1

PTSI B Lycée Eiffel

26 septembre 2015

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$
2. $x + 3\sqrt{1-x} \leq 3$
3. $|2x| - |2x+2| + |x+3| \leq 3$
4. $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) \leq \ln(2)$

Exercice 2

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation (E) : $x^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$.

1. On pose $f(x) = \sqrt{x}\ln(x) + \ln(2)$. Donner le domaine de définition de f, et préciser ses limites aux bornes de ce domaine.
2. Étudier les variations de la fonction f, et dresser un tableau de variations complet de la fonction.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on rappelle que $\ln(2) \simeq 0.69$, et $\dfrac{1}{e} \simeq 0.36$).
4. On va chercher les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = \dfrac{1}{n^2}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow n^2 = 2^n$.
   (b) En déduire que n doit être pair puis, en posant $n = 2p$, que $2^{p-1} = p$.
   (c) Trouver deux solutions évidentes à cette dernière équation, et en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
5. Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 3

On définit pour tout entier naturel n la fonction f_n par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

1. Étudier la parité de la fonction f_n (on pourra distinguer deux cas).

2. Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition, ainsi que les éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}_n$.
3. Calculer la dérivée f_1' de la fonction f_1, puis étudier ses variations. Faire également le tableau de variations de la fonction f_2.
4. Généraliser l'étude des variations à f_n (toujours en distinguant deux cas).
5. En notant y_n le maximum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_n, déterminer la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$. Existe-t-il un majorant commun à toutes les fonctions f_n ?
6. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$, puis celle de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n+2}$.
7. Calculer la dérivée seconde f_1'' de la fonction f_1, et déterminer les réels pour lesquels $f_1''(x) = 0$. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_1$ en son point d'abscisse a, où a est le seul réel strictement positif vérifiant $f_1''(x) = 0$.
8. Tracer une allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ dans un même repère.

Problème : Un peu de géométrie !

Le but de ce problème est de déterminer la forme des triangles ayant une aire maximale à périmètre fixé.

I. Une inégalité classique.

1. Démontrer à l'aide d'une étude de fonction que, $\forall a \in [0, 1]$, $a(1-a)^2 \leq \dfrac{4}{27}$.
2. On fixe désormais une valeur de $a \in [0, 1]$, et on pose $f_a(x) = -ax^2 + a(1-a)x$.
   (a) Déterminer le maximum de la fonction f_a sur l'intervalle $[0, 1-a]$.
   (b) En déduire la propriété suivante : si a, b et c sont trois réels positifs tels que $a+b+c = 1$, alors $abc \leq \dfrac{1}{27}$.
   (c) Dans quels cas l'inégalité démontrée à la question précédente est-elle une égalité ?
3. En utilisant la propriété démontrée à la question 2.b, prouver que, quels que soient les réels positifs x, y et z, on a $xyz \leq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$.
4. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $x = y = z$.

II. Applications aux triangles.

Soit $p > 0$. On considère un triangle de côtés a, b et c tels que $a + b + c = 2p$ (autrement dit, p est le demi-périmètre du triangle), et on admet que l'aire $\mathcal{A}$ de ce triangle peut être obtenue par la formule de Héron : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

1. On note $x = p - a$, $y = p - b$ et $z = p - c$, justifier que ces trois nombres sont positifs.
2. En appliquant les résultats de la première partie, déterminer la valeur maximale de $\mathcal{A}$ (en fonction de p).
3. À quoi ressemble le triangle dans le cas où l'aire est maximale ?