# Devoir Maison n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 juin 2016

## Exercice 1

1. Puisque $n = 1$, le premier tirage s'effectue avec une boule blanche et trois noires dans l'urne. On a donc une chance sur quatre de tirer la boule blanche, ce qui amènera à ne pas avoir de boule blanche après le premier tirage. On a trois chances sur quatre de tirer une boule noire et de se retrouver ensuite avec deux boules blanches et quatre noires. On obtient donc :

| $k$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $P(X_1 = k)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

On calcule aisément $E(X_1) = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, puis $E(X_1^2) = \dfrac{12}{4} = 3$. En appliquant la formule de König-Huygens, on trouve donc $V(X_1) = 3 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Pour déterminer la loi de $X_2$, on peut distinguer deux cas : si $X_1 = 0$ alors on aura nécessairement $X_2 = 1$ (on tire une boule noire), ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{4}$. Par contre, si $X_1 = 2$, on va tirer une boule blanche avec probabilité $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, ce qui ajoute une probabilité $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$ de se retrouver avec $X_2 = 1$. Il reste une probabilité $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$ de tirer deux boules noires successives et d'avoir $X_2 = 3$. On peut conclure :

| $k$ | 1 | 3 |
|---|---|---|
| $P(X_1 = k)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Les calculs sont toujours triviaux : $E(X_2) = 2$, puis $E(X_2^2) = 5$, dont on déduit $V(X) = 5 - 4 = 1$.

Dernière loi à calculer, celle de $X_3$. On peut déjà signaler que $X_3(\Omega) = \{0, 2, 4\}$ (on ne peut qu'ajouter ou enlever une boule blanche par rapport aux deux cas précédents). On ne pourra avoir $X_3 = 0$ que si $X_2 = 1$ et si on tire la boule blanche, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$. De même, on aura $X_3 = 4$ seulement si $X_2 = 3$ et si on tire une des cinq boules noires, soit $P(X_3 = 4) = \dfrac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \dfrac{5}{16}$. Il reste donc $P(X_3 = 2) = 1 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{5}{16} = \dfrac{9}{16}$ (ce qu'on peut aussi retrouver en distinguant les deux possiblités pouvant mener à cette valeur).

| $k$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P(X_1 = k)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{9}{16}$ | $\dfrac{5}{16}$ |

Des calculs un peu moins débiles pour finir : $E(X_3) = \dfrac{18 + 20}{16} = \dfrac{19}{8}$, puis $E(X_3^2) = \dfrac{36 + 80}{16} = \dfrac{29}{4}$. On en déduit $V(X_3) = \dfrac{29}{4} - \dfrac{361}{64} = \dfrac{103}{64}$. Passionnant.

Et un petit programme Python pour terminer (la variable $b$ désigne le nombre de boules blanches dans l'urne, et $n$ le nombre de boules noires) :

from random import randint

```
def simu(i) :
    b=1
    n=3
    for k in range(i) :
        r=randint(1,b+n)
        if r<=b :
            b,n=b-1,n-1
        else :
            b,n=b+1,n+1
    return b
```

2. On peut évidemment considérer que $e_0 = 1$. Si $n \geq 1$, on peut toujours écrire, via la formule des probabilités totales, que $P(E_n) = P(X_1 = n-1) \times P_{X_1=n-1}(E_n) + P(X_1 = n+1) \times P_{X_1=n+1}(E_n)$ (en effet, les seules valeurs que peut prendre la variable $X_1$ sont $n-1$ et $n+1$. Or, $P_{X_1=n-1}(E_n) = P(E_{n-1})$ (le fait d'avoir déjà effectué un tirage ne change rien, on part d'une urne avec $n-1$ boules blanches), et $P_{X_1=n+1}(E_n) = P(E_{n+1})$. Il suffit de constater que $P(X_1 = n-1) = \dfrac{n}{2n+2}$ (c'est la probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne initiale), et $P(X_1 = n+1) = \dfrac{n+2}{2n+2}$ pour conclure.
3. Essayons donc de prouver par récurrence la propriété $P_n$ : $e_n \geq e_{n+1}$. Si on admet que $e_0 = 1$, la propriété $P_0$ est trivialement vraie puisque $e_1 \leq 1$ (c'est une probabilité). Sinon, on commence à $n = 1$ et on utilise la question précédente : $e_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}e_2$, donc $e_2 - e_1 = \dfrac{1}{4}e_2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}(e_2 - 1) \leq 0$. Supposons désormais la propriété vraie au rang $n$, et partons de $e_n = \dfrac{n}{2n+2}e_{n-1} + \dfrac{n+2}{2n+2}e_{n+1}$, on multiplie par $\dfrac{2n+2}{n+2}$ pour obtenir $e_{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+2}e_n - \dfrac{n}{n+2}e_{n-1}$. On en déduit que $e_{n+1} - e_n = \dfrac{n}{n+2}(e_n - e_{n-1}) \leq 0$ par hypothèse de récurrence. La propriété est donc héréditaire, et vraie pour tout entier $n$.
4. Posons donc, alors $u_n = (n+1)e_n = \dfrac{n}{2}e_{n-1} + \dfrac{n+2}{2}e_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + \dfrac{1}{2}u_{n+1}$. Autrement dit, $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x + 1 = 0$. Cette équation a pour racine double $x = 1$, on peut donc affirmer que $u_n = An + B$. Les conditions initiales imposent $u_0 = e_0 = 1 = B$, puis $u_1 = 2e_1 = A + B$, donc $A = 1 - 2e_1$. On conclut que $u_n = 1 + n(2e_1 - 1)$.
5. D'après la question précédente, $e_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{n}{n+1}(2e_1 - 1)$. On aura donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n = 2e_1 - 1 = 0$, ce qui impose $e_1 = \dfrac{1}{2}$. On peut alors simplifier : $e_n = \dfrac{1}{n+1}$.

## Exercice 2 : le téléphone arabe.

1. L'énoncé n'étant pas très clair, fixons pour le corrigé le fait que $n$ désigne bien le nombre de transmissions (il y a donc $n-1$ intermédiaires dans ce cas, ou si on préfère le dernier intermédiaire $I_n$ est $B$). On est en tout cas dans une situation classique de loi binomiale, de paramètre $(n, p)$. La cours affirme donc que $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2. Comme expliqué dans la première question, je considère que l'intermédiaire $I_5$ est le récepteur $B$. On a donc $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. L'événement $Y = 5$ est réalisé si toutes les transmissions se font correctement, donc $P(Y = 5) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = \dfrac{32}{243}$. De l'autre côté, on aura $Y = 0$ si uniquement la première transmission est incorrecte, et les quatre suivantes correctes (pour

garder un mauvais message de $I_1$ jusqu'à $I_5$), soit $P(Y=0) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{243}$. Pour avoir $Y = 4$, il faut qu'il y ait soit une dernière transmission incorrecte (et les quatre premières correctes), probabilité $\frac{16}{243}$, soit une succession de deux transmissions incorrectes et trois transmissions correctes le reste du temps. Il y a quatre positions possibles pour les transmissions incorrectes, ce qui donne $P(Y=4) = \frac{16}{243} + 4 \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{48}{243}$. Pour avoir $Y_1$, soit le seul intermédiaire à avoir le bon message est le premier, ce qui implique une transmission correcte et quatre incorrectes ; soit il est à la fin, et il y a deux transmissions incorrectes (la première et la dernière) ; soit il est ailleurs, et il y a alors trois transmissions incorrectes (par exemple les transmissions 1, 3 et 4, l'intermédiaire ayant le message correct étant le 3). On additionne tout : $P(Y=1) = \frac{16}{243} + \frac{8}{243} + 3 \times \frac{4}{243} = \frac{36}{243}$. Il suffit de faire un des deux cas restants, par exemple pour $Y = 3$. On distingue les cas suivants :

- les trois intermédiaires corrects sont les trois premiers, on a une seule transmission incorrecte.
- les deux intermédiaires incorrects sont successifs mais pas à la fin (trois cas), deux transmissions incorrectes.
- les deux intermédiaires incorrects sont séparés mais incluent le dernier (trois cas), trois transmissions incorrectes.
- les deux intermédiaires incorrects sont séparés et n'incluent pas le dernier (par exemple quatre premières transmissions incorrectes et la dernière correcte, les intermédiaires 2, 4 et 5 ont le bon message), encore trois cas avec quatre mauvaises transmissions.

On conclut : $P(Y=3) = \frac{16}{243} + 3 \times \frac{8}{243} + 3 \times \frac{4}{243} + 3 \times \frac{2}{243} = \frac{58}{243}$. Une petite soustraction permet d'obtenir la dernière probabilité :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(y=k)$ | $\frac{16}{243}$ | $\frac{36}{243}$ | $\frac{53}{243}$ | $\frac{58}{243}$ | $\frac{48}{243}$ | $\frac{32}{243}$ |

Un calcul absolument palpitant donne alors $E(Y) = \frac{36+106+174+192+160}{243} = \frac{668}{243}$ (non, ça ne se simplifie pas). De même, $E(Y^2) = \frac{36+212+522+768+800}{243} = \frac{2338}{243}$, puis $V(X) = \frac{121\ 910}{59\ 049}$. Absolument fascinant.

3. (a) On a manifestement $P(C) + P(D) = 1$, il faut bien qu'un nombre entier soit pair ou impair.

   (b) Le message est transmis correctement si et seulement si on a un nombre pair de transmissions correctes, donc avec une probabilité $P(C)$.

   (c) En utilisant le fait que la loi est binômiale, on obtient facilement $P(C) = \sum_{k \text{ pair} \leq n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, et de même pour $P(D)$ avec les impairs. Pour obtenir la différence des deux sous forme de somme, il suffit de se débrouiller pour mettre un signe $-$ uniquement quand $k$ est impair, soit $P(C) - P(D) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k p^k (1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n = (1-2p)^n$ en reconnaissant un binôme de Newton (on écrit simplement $(-1)^k p^k = (-p)^k$).

   (d) En additionnant les deux équations obtenues, $2P(C) = 1 + (1-2p)^n$, donc $P(C) = \frac{1}{2} + \frac{(1-2p)^n}{2}$.

   (e) Quand $p = \frac{1}{2}$, la probabilité de bonne transmission du message vaut toujours $\frac{1}{2}$, quelle que soit la valeur de $n$. Dans le cas général, $\lim_{n \to +\infty} (1-2p)^n = 0$, donc la probabilité tend de toute façon vers $\frac{1}{2}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.