Devoir Maison n°8

PTSI B Lycée Eiffel

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient initialement n boules blanches et $n+2$ boules noires. On effectue une succession de tirages dans cette urne suivant le protocole suivant :

- si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne, et on retire également une boule noire de l'urne.
- si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne, et on ajoute en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne.

Autrement dit, il y aura toujours dans l'urne deux boules noires de plus que de boules blanches.

1. On suppose $n = 1$, et on note X_i le nombre de boules blanches dans l'urne après le i-ème tirage. Donner la loi, l'espérance et la variance des variables X_1, X_2 et X_3. Écrire un programme Python permettant d'effectuer une simulation de la variable X_n (pour une valeur du paramètre n laissée au choix de l'utilisateur).
2. Dans le cas général, on note E_n l'événement « L'urne finit par ne plus contenir de boules blanches, sachant qu'il y en avait n au départ », et e_n sa probabilité. Montrer, en considérant les deux résultats possibles du premier tirage, que $e_n = \dfrac{n}{2n+2}e_{n-1} + \dfrac{n+2}{2n+2}e_{n+1}$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (e_n) (on pourra faire une récurrence), et en déduire sa convergence (on ne cherche pas sa limite pour l'instant).
4. On pose $u_n = (n+1)e_n$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de u_{n-1}, puis en déduire une expression de u_n en fonction de n et de e_1.
5. En déduire e_n en fonction de n et de e_1. En admettant que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$, calculer e_n.

Exercice 2 : le téléphone arabe.

Une information binaire (vrai ou faux, par exemple) est transmise par un émetteur A vers un récepteur B en passant par n intermédiaires I_1, I_2, …, I_n : A transmet le message à I_1, I_1 à I_2, etc, jusqu'à ce que I_n le transmette à B. Il y a donc n transmissions à effectuer, sachant qu'à chaque transmission, il y a une probabilité p (la même à chaque fois) que le message soit mal transmis et transformé en son opposé (bien évidemment, si deux transmissions sont incorrectes, on retrouvera donc le message initial). Les différentes transmissions sont indépendantes les unes des autres.

1. On note X le nombre de transmissions erronées. Donner la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
2. Uniquement pour cette question, on pose $p = \dfrac{1}{3}$ et $n = 5$, et on note Y le nombre d'intermédiaires ayant reçu un message correct. Donner la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.
3. On note C l'événement « X prend une valeur paire » et D l'événement « X prend une valeur impaire ».
   (a) Que vaut $P(C) + P(D)$?
   (b) Exprimer la probabilité que le message soit transmis correctement de A à B en utilisant les événements C et D.
   (c) Calculer $P(C) - P(D)$ en regroupant cette différence sous forme d'une somme faisant apparaitre un binôme de Newton.
   (d) En déduire les valeurs de $P(C)$ et de $P(D)$.
   (e) Que se passe-t-il quand $p = \dfrac{1}{2}$? Dans le cas général, quelle est la limite quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité que le message soit transmis correctement de A à B ?