Devoir Maison n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 mai 2016

Problème 1

Première partie

1. La fonction f_n ne peut être définie que sur l'intervalle de définition de la fonction arcsin, et c'est la seule condition à respecter, donc $\mathcal{D}_{f_n} = [-1, 1]$. Les fonctions arcsin et sin étant toutes les deux impaires, f_n sera elle-même impaire : $f_n(-x) = \sin(2n \arcsin(-x)) = \sin(-2n \arcsin(x)) = -\sin(2n \arcsin(x)) = -f_n(x)$. On devrait donc logiquement avoir $f_n(0) = 0$, vérifions le : $f_n(0) = \sin(2n \arcsin(0)) = \sin(0) = 0$. Dernier calcul : $f_n(1) = \sin(2n \arcsin(1))$ $= \sin\left(2n \times \frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0$.
2. On a $f_n(x) = 0$ si $2n \arcsin(x) = k\pi$, pour un entier relatif k quelconque. Autrement dit, on doit avoir $\arcsin(x) = \frac{k\pi}{2n}$, soit $x = \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. On peut restreindre les valeurs de k aux entiers compris entre 0 et n pour obtenir des valeurs de x distinctes et comprises entre 0 et 1.
3. (a) La continuité est évidente (composée de fonctions continues), et la dérivabilité sur $]-1, 1[$ aussi (seule la fonction arcsin, qui n'est pas dérivable en ± 1, pose problème pour ces deux valeurs). On calcule sans problème $f_n'(x) = \frac{2n}{\sqrt{1-x^2}} \cos(2n \arcsin(x))$ (qu'on ne cherchera pas à simplifier !).

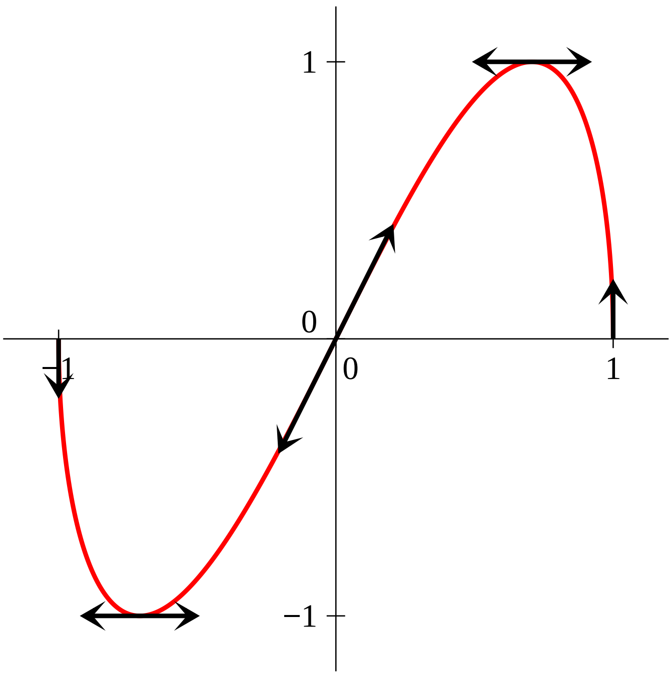
   (b) On peut déjà constater que $\cos(2n \arcsin(1)) = \cos(n\pi) = \pm 1$ selon la parité de n. Ensuite, on calcule $\frac{2n\sqrt{1-x^2}}{x-1} = -\frac{2n\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$, qui a toujours pour limite $-\infty$ quand x tend vers 1. Le théorème de prolongement de la dérivée assure alors que la fonction f_n n'est jamais dérivable à droite en 1. Plus précisément, la courbe représentative de f_n admettra en 1 une demi-tangente verticale, avec une pente tendant vers $-\infty$ si n est pair, et vers $+\infty$ si n est impair. En -1, le calcul est très similaire, on a $\cos(2n \arcsin(-1)) = \pm 1$, et $\frac{2n\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \frac{2n\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}$, qui a pour limite $+\infty$ quand x tend vers -1. La conslution est donc la même, au détail près que le signe de la limite infinie est inversé par rapport à celui obtenu en 1.
4. Calculons donc : on sait que $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0. On en déduit que $2n \arcsin(x) = 2nx + \frac{n}{3}x^3 + o(x^3)$, puis on compose : $f_n(x) = \sin\left(2nx + \frac{n}{3}x^3 + o(x^3)\right) = 2nx + \frac{n}{3}x^3 - \frac{1}{6}\left(2nx + \frac{n}{3}x^3\right)^3 + o(x^3) = 2nx + \frac{n}{3}x^3 - \frac{4n^3}{3}x^3 + o(x^3) = 2nx + \frac{n(1-4n^2)}{3}x^3 + o(x^3)$.
5. On a bien sûr envie de faire le changement de variable $t = \arcsin(x)$, soit $x = \sin(t)$, qui est tout à fait valide sur l'intervalle $[0, 1]$ (puisque sin y est bijective). On modifie alors les bornes qui deviennent 0 et $\frac{\pi}{2}$, et l'élément différentiel devient $dx = \cos(t)\ dt$, donc

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nt)\cos(t)\ dt$. Le plus simple est maintenant d'enchainer sur une transformation somme-produit : $\sin(2nt)\cos(t) = \dfrac{1}{2}(\sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t))$. On a donc $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t) + \sin((2n-1)t)\ dt = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} - \dfrac{\cos((2n-1)t)}{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n-1}\right) = \dfrac{2n}{4n^2-1}$.

6. Faisons les choses dans le désordre et commençons par l'étude en 0. On a calculé le développement limité à l'ordre 3 tout à l'heure, qui donne pour $n = 1$: $f_1(x) = 2x - x^3 + o(x^3)$. La tangente en 0 a donc pour équation $y = 2x$, et $f_1(x) - 2x \sim -x^3$ est positif à gauche de 0 et négatif à droite. La courbe traversera donc sa tangente en 0, étant localement au-dessus à gauche de 0, puis au-dessus à droite. Revenons à l'étude des variations : $f_1'(x) = \dfrac{2\cos(2\arcsin(x))}{\sqrt{1-x^2}}$. Or, $\cos(2\arcsin(x)) = 1 - 2\sin^2(\arcsin(x)) = 1 - 2x^2$ (toutes nos valeurs de x sont donc l'intervalle $[-1, 1]$, donc $f_1'(x) = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$, et s'annule en particulier en $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Comme on sait que la fonction est impaire, on peut se contenter d'étudier sur l'intervalle $[0, 1]$ et de calculer $f_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(2\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \sin\left(2 \times \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
f_1	0	-1	0	1	0

Pour le tracé de courbe, on n'oublie pas la tangente en 0 et les demi-tangentes verticales en ± 1 :



Deuxième partie

1. (a) On veut donc calculer $J_p(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin^2(2p\arcsin(t))}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Comme précédemment, on va effectuer le changement de variable $u = \arcsin(t)$ (ou $t = \sin(u)$), qui est autorisé puisque $x \leq 1$. On obtient alors $J_p(x) = \displaystyle\int_0^{\arcsin(x)} \frac{\sin^2(2pu)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}\cos(u)\,du$. Or, sur l'intervalle d'intégration, qui est inclus dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut simplifier $\dfrac{\cos(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} = 1$, donc $J_p(x) = \displaystyle\int_0^{\arcsin(x)} \sin^2(2pu)\,du$. Pour calculer cette intégrale, on linéarise en utilisant la formule de duplication $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$, donc $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$. Ici, on a donc $J_p(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\arcsin(x)} 1 - \cos(4pu)\,du = \frac{1}{2}\left[u - \frac{\sin(4pu)}{4p}\right]_0^{\arcsin(x)} = \frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{\sin(4p\arcsin(x))}{8p} = \frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{8}f_{2p}(x)$.

   (b) Lorsque x tend vers 1, on sait, par confinuité de la fonction f_{2p}, que $f_{2p}(x)$ tend vers $f_{2p}(1) = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} J_p(x) = \dfrac{1}{2}\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. (a) On effectue évidemment le même changement de variable, le dénominateur va se simplifier avec l'élément différentiel exactement comme tout à l'heure, et il va rester $K_{p,q}(x) = \displaystyle\int_0^{\arcsin(x)} \sin(2pu)\sin(2qu)\,du$. Cette fois-ci, c'est à nouveau une transformation somme-produit qu'on va exploiter pour linéariser l'intégrale : $\sin(2pu)\sin(2qu) = \dfrac{1}{2}(\cos(2(p-q)u) - \cos(2(p+q)u))$, donc $K_{p,q}(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\arcsin(x)} \cos((2(p-q)u)) - \cos(2(p+q)u))\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2(p-q)u)}{2(p-q)} - \frac{\sin(2(p+q)u)}{2(p+q)}\right]_0^{\arcsin(x)} = \frac{1}{4(p-q)}f_{p-q}(x) - \frac{1}{4(p+q)}f_{p+q}(x)$.

   (b) De même que précédemment, les fonctions ont une limite nulle quand x tend vers 1, on obtient donc simplement $\lim\limits_{x\to 1} K_{p,q}(x) = 1$.

Troisième partie

1. Écrivons donc $\sin(2n\theta) = \Im(e^{i2n\theta}) = \Im((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n})$. Or, en développant joyeusement à l'aide du binôme de Newton, $(i\sin(\theta) + \cos(\theta))^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{2n-k}(\theta)$. On ne souhaite garder que la partie imaginaire de cette expression. Or, i^k est réel lorssque k est pair, et imaginaire pur lorsque k est impair. On ne va donc garder que les termes correspondant à des valeurs impaires de k, donc à des valeurs entières comprises entre 0 et $n-1$ de j, en posant $k = 2j+1$. On aura alors $i^k = i^{2j+1} = (-1)^j i$. On obtient donc
$\sin(2n\theta) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1}(-1)^j\cos(\theta)^{2n-2j-1}\sin(\theta)^{2j+1}$
$= \sin(\theta)\cos(\theta)\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{2n}{2j+1}(\cos^2(\theta))^{n-j-1}(\sin^2(\theta))^j$
$= \sin(\theta)\cos(\theta)\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{2n}{2j+1}(1-\sin^2(\theta))^{n-j-1}(\sin^2(\theta))^j$. En développant brutalement les puissances de $1 - \sin 2(\theta)$ dans la somme, on obtiendra certainement un polynôme en la

variable $\sin(\theta)$, et même en l'ocurrence un polynôme en la variable $\sin^2(\theta)$, ce qui prouve l'affirmation de l'énoncé.

2. (a) On peut donc écrire $f_n(x) = \sin(2n\arcsin(x)) = \cos(\arcsin(x))\sin(\arcsin(x))P_n(\sin(\arcsin(x)))$. Dans notre intervalle, on a toujours $\sin(\arcsin(x)) = x$, et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$ (tout est positif), ce qui donne bien $f_n(x) = x\sqrt{1-x^2}P_n(x)$.

   (b) On a vu un peu plus haut que $P_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{2n}{2j+1}(1-X^2)^{n-j-1}(X^2)^j$. Pour $n=1$, le seul terme de la somme est égal à $\displaystyle\binom{2}{1}(-1)^0(1-X^2)^0(X^2)^0 = 2$, donc $P_1 = 2$. En fait, cela revient simplement à dire que $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$, ce qu'on sait depuis un certain temps. Pour $n=2$, notre somme comporte deux termes : $P_2 = \displaystyle\binom{4}{1}(1-X^2)^1(X^2)^0 - \binom{4}{3}(1-X^2)^0(X^2)^1 = 4(1-X^2) - 4X^2 = 4-8X^2$. On retrouve ainsi la formule bien connue (ou pas) $\sin(4\theta) = 4\cos(\theta)\sin(\theta)((1-2\sin^2(\theta))$ (qu'on retrouve en fait très facilement en appliquant deux fois de suite les formules de duplication). Enfin, $P_3 = \displaystyle\binom{6}{1}(1-X^2)^2(X^2)^0 - \binom{6}{3}(1-X^2)^1(X^2)^1 + \binom{6}{5}(1-X^2)^0(X^2)^2 = 6(1-2X^2+X^4) - 20(X^2-X^4) + 6X^4 = 32X^4 - 32X^2 + 6$.

3. (a) Le fait qu'il n'y a que des puissances paires est une conséquence de ce qu'on a constaté plus tôt : P_n est en fait un polynôme de la variable $\sin^2(\theta)$, donc un polynôme en x^2 si on pose $x = \sin(\theta)$. On peut toujours avoir $a_p \neq 0$ quitte à n'écrire que les termes effectivement non nuls du développement (le polynôme n'est de toute façon pas le polynôme nul).

   (b) On peut calculer explicitement le coefficient a_{n-1} (éventuellement nul) en ne gardant dans la somme définissant P_n que les termes en X^{2n-2} (on ne peut pas obtenir de puissance supérieure) : on a $a_{n-1}X^{2n-2} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{2n}{2j+1}(-1)^{n-j-1}(X^2)^{n-j-1}(X^2)^j = (-1)^{n-1}X^{2(n-1)}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1}$. Le nombre dans la somme étant une somme d'entiers strictement positifs, il est certainement non nul, donc $a_{n-1} \neq 0$. Ceci suffit à prouver que $p = n-1$ (encore une fois, aucun terme de degré plus grand que $2n-2$ ne peut sortir du développement de notre somme). Peut-on réussir à simplifier l'expression de a_{n-1} en calculant la somme (qui n'est autre que la somme des coefficients binomiaux « impairs » sur une ligne d'indice pair du triangle de Pascal) ? Mais oui ! On sait bien entendu que $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j} = 2^{2n}$ (on a démontré cette formule de plusieurs façons dans le cours). Via le binôme de Newton, on obtient aussi $\displaystyle\sum_{j=0}^{2n}(-1)^j\binom{2n}{j} = (-1+1)^{2n} = 0$. En soustrayant ces deux égalités, les coefficients binomiaux pairs vons s'annuler, mais les coefficients binomiaux impairs s'additionner (puisqu'il apparaissent avec un facteur 1 dans la première somme et -1 dans la deuxième), ce qui donne alors $\displaystyle 2\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1} = 2^{2n} + 0 = 2^{2n}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1} = 2^{2n-1}$, et donc $a_p = a_{n-1} = (-1)^{n-1}2^{2n-1}$. C'est tout à fait cohérent avec les premières valeurs calculées plus haut, par exemple pour $n=3$, $a_2 = (-1)^2 2^5 = 32$.

   Pour calculer $P_n(0)$ et $P_n(1)$, il suffit de revenir à la définition de P_n à l'aide de la somme, dans chacun des deux cas, seul un terme de la somme n'est pas nul (celui où X^2 a une puissance nulle pour $P_n(1)$ et celui où $1 - X^2$ a une puissance nulle pour $P_n(0)$). On calcule alors $P_n(0) = (-1)^0\binom{2n}{1}(1-0^2)^{n-1} = 2n$, et $P_n(1) = (-1)^{n-1}\binom{2n}{2n-1}(1^2)^{n-1} = (-1)^{n-1}.2n$. Ces valeurs sont cohérentes avec les premiers polynômes calculés plus haut.

4. (a) On vient de voir que P_n ne s'annule ni en 0 ni en 1. Comme $x\sqrt{1-x^2}$ ne s'annule pas sur $]0,1[$, résoudre l'équation $P_n(x) = 0$ sur $[0,1]$ est équivalent à résoudre $f_n(x) = 0$ sur ce même intervalle. Autrement dit, les solutions ont déjà été calculées plus haut (deuxième question de la première partie), ce sont les réels $x_k = \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, pout toutes les valeurs de k entières comprises entre 1 et $n-1$ (il faut supprimer $k = 0$ et $k = n$, qui nous ramèneraient vers les valeurs incorrectes $x = 0$ et $x = 1$). Le polynôme P_n étant pair (il est somme de puissances paires de x), les racines sur $[-1,0]$ sont exactement les opposées de celles obtenues sur $[0,1]$. Si on préfère, on peut toujours les noter $x_k = \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, mais pour $-n-1 \leq k \leq -1$. On a donc déjà obtenu $2(n-1) = 2n-2$ racines pour le polynôme P_n. Comme ce dernier est de degré $2n-2$, il n'y a pas à chercher plus loin, il ne peut pas avoir d'autres racines réelles (ni complexes d'ailleurs).

   (b) Au vu des calculs de la question précédente, le produit de toutes les racines du polynôme P_n est égal à $\prod_{k=1}^{n-1} -\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = (-1)^{n-1}U_n^2$. Or, les relations coefficients-racines appliquées au polynôme P_n nous assurent que ce produit de racines doit être égal à $(-1)^{2n-2}\frac{a_0}{a_p} = (-1)^{n-1}\frac{n}{2^{2n-2}}$. On en déduit que $U_n^2 = \frac{n}{2^{2n-2}}$, donc $U_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ (le produit U_n est évidemment positif, chacun de ses termes est positif).

Problème 2

1. (a) Par définition de f, P est de degré au maximum m, donc AP' et $P'A$ sont tous deux de degré maximal $n+m-1$ (on suppose que A n'est pas un polynôme constant et donc que A' est de degré exactement $n-1$). De plus, en notant b le coefficient dominant (donc celui de degré m) du polynôme P, le terme dominant du polynôme AP' sera égal à mbX^{n+m-1}, et celui de PA' sera égal à nbX^{n+m-1}. Les entiers n et m ne pouvant être égaux par hypothèse, la différence de ces deux termes ne peut pas être nulle, ce qui prouve que $f(P)$ est exactement de degré $m+n-1$ dans ce cas. La valeur maximale de p est donc $m+n-1$.

   (b) Il n'y a plus qu'à prouver qu'elle est linéaire : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_m[X]^2$, on peut calculer $f(\lambda P + Q) = A(\lambda P + Q)' - A'(\lambda P + Q) = \lambda(AP' - PA') + AQ' - QA' = \lambda f(P) + f(Q)$. L'application f est bien linéaire.

   (c) Puisque $(QA)' = Q'A + QA'$, on aura $f(QA) = AQ'A - AQA' - QAA' = A^2Q'$.

   (d) On sait que A ne s'annule pas sur l'intervalle I, la fonction définie sur I par $h : x \mapsto \frac{P(x)}{A(x)}$ est donc définie et dérivable sur l'intervalle I (quel que soit le polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$). Or, $h'(x) = \frac{P'(x)A(x) - P(x)A'(x)}{A^2(x)}$, donc $f(P) = 0$ si et seulement si h' est nulle sur I, c'est-à-dire si et seulement si h est une fonction constante sur I. Or, h ne peut être constante sur I que si $P = kA$ sur l'intervalle I, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier (si le polynôme $P - kA$ s'annule sur I, il a une infinité de racines donc il est nul sur $\mathbb{R}$). Autrement dit, on peut écrire $\ker(f) = \text{Vect}(A)$. En particulier, $\dim(\ker(f)) = 1$, et le théorème du rang nous permet alors d'assurer que $\text{rg}(f) = m$ (puisque $\mathbb{R}_m[X]$ est de dimension $m+1$).

2. (a) On sait très bien que la famille $(Y_i)_{i \leq m}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ (elle est constituée des images de la base canonique de notre espace de départ). De plus, on sait

que $f(A) = 0$, donc $f(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0) = 0$. Par linéarité de f, on peut donc écrire $f(X^n) = -a_{n-1}f(X^{n-1}) - \cdots - a_1f(X) - a_0f(1)$. On vient d'exprimer Y^n comme combinaison linéaire de la famille $(Y_i)_{i<n}$, ce qui prouve qu'on peut supprimer Y_n de notre famille sans modifier l'espace vectoriel engendré. Autrement dit, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((Y_i)_{i\neq n})$. Or, on sait que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension m et la famille génératrice obtenue contient désormais m vecteurs, c'est donc nécessairement une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(b) On vient de faire le calcul juste au-dessus : $Y_n = -a_{n-1}Y_{n-1} - \cdots - a_1Y_1 - a_0Y_0$. Les coordonnées de Y_n dans notre base sont donc $(-a_0, \dots, -a_{n-1}, 0, \dots, 0)$, avec $m - n$ zéros à la fin du vecteur.

3. (a) C'est le même calcul qu'à la première question : le coefficiant dominant de $A(X^i)'$ sera égal à iX^{n+i-1}, et celui de $A'X^i$ sera égal à nX^{n+i-1}. Comme $i \neq n$, ces deux termes ne peuvent pas s'annuler et le degré de Y_i est donc exactement égal à $n + i - 1$.

(b) On a prouvé que la famille $(Y_i)_{i\neq n}$ était une base de $\mathrm{Im}(f)$, constituée d'après la question précédente de polynôme de degrés tous différents. Une combinaison linéaire de ces polynômes (non nulle) a donc un degré au moins égal au plus petit de ces degrés, c'est-à-dire $n - 1$.

(c) Si P est divisible par A^2, on peut écrire $P = A^2Q$, avec Q un polynôme de degré au maximum $p - 2n = m - n - 1$. Dans ce cas, le polynôme QA est de degré au maximum $m-1$. Notons Q_1 un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_m[X]$ tel que $Q_1' = Q$ (on peut certainement en trouver un !), d'après la question 1c, $f(Q_1A) = A^2Q_1' = A^2Q = P$, donc $P \in \mathrm{Im}(f)$.
Soit maintenant $S \in \mathbb{R}_p[X]$, on peut écrire $S = A^2Q + R$ en effectuant sa division euclidienne par A^2, et on vien de voir que A^2Q appartenant à $\mathrm{Im}(f)$ (il est certainement lui aussi de degré inférieur ou égal à p). Si $S \in \mathrm{Im}(f)$, on aura donc $R = S - A^2Q \in \mathrm{Im}(f)$, car $\mathrm{Im}(f)$ est stable par combinaison linéaires (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_p[X]$), et réciproquement, si $R \in \mathrm{Im}(f)$, P est une somme de deux polynômes de l'image, donc appartient à l'image. La valeur maximale du degré de R est $2n - 1$ (le reste a un degré strictement inférieur à celui du dividende, propriété de la division euclidienne), qui est par hypothèse inférieur ou égal à p.

4. (a) On cherche les primitives de $\dfrac{AP' - PA'}{A^2}$, or on sait que ce quotient est la dérivée de $\dfrac{P}{A}$.
Les primitives sont donc de la forme $\dfrac{P}{A} + k$, pour $k \in \mathbb{R}$.

(b) Par définition, $Y_i = f(X^i)$, les primitives recherchées sont donc de la forme $\dfrac{X^i}{A} + k$.

5. (a) Calculons : $Y_0 = f(1) = -A' = -3X^2 + 1$; $Y_1 = f(X) = A - XA' = -2X^3 + 1$; et $Y_2 = f(X^2) = 2XA - X^2A' = -X^4 - X^2 + 2X$

(b) Il suffit de constater que $X^4 + 4X^3 - 2X^2 - 2X - 1 = -Y_2 - 2Y_1 + Y_0$, qui est combinaison linéaire d'éléments de l'image. Plus précisément, notre polynôme peut s'écrire $f(-X^2 - 2X + 1)$.

(c) En exploitant les résultats de la partie précédente, une primitive est $\dfrac{-x^2 - 2x + 1}{x^3 - x + 1}$.

(d) Comme A^2 est de degré 6, un polnynôme de degré 4 est toujours son propre reste par sa division par A^2. Il faut donc que notre polynôme soit une combinaison linéaire des polynômes Y_i, et il suffit de prendre Y_0, Y_1 et Y_2 puisque les suivants seront de degré nettement trop élevé. On doit donc avoir $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = x(-3X^2 + 1) + y(-2X^3 + 1) + z(-X^4 - X^2 + 2X)$. En développant et en identifiant, on obtient le système constitué des équations $a = -z$; $b = -2y$; $c = -3x - z$; $d = 2z$ et $e = x + y$. On doit donc avoir $z = -a$, $y = -\dfrac{b}{2}$ et $x = e - y = e + \dfrac{b}{2}$. Les deux dernières équations imposent alors les conditions $d = 2z = -2a$, et $c = -3x - z = -3e - \dfrac{3}{2}b + a$, qui sont deux conditions nécessaires et suffisantes pour que notre polynôme appartienne à $\mathrm{Im}(f)$.