Devoir Maison n°6

PTSI B Lycée Eiffel

1er avril 2016

Problème 1 : analyse.

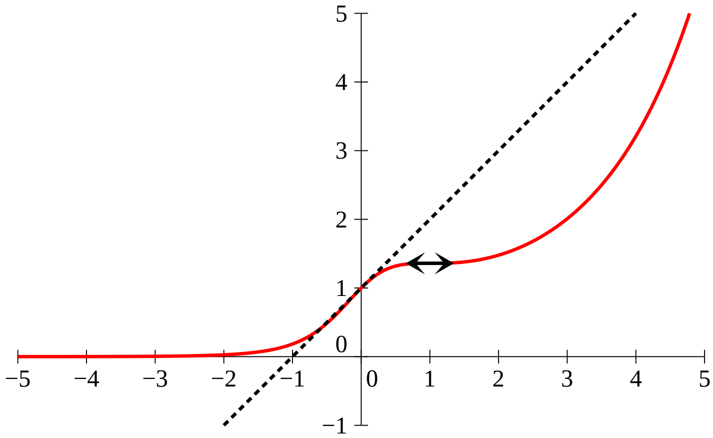
Première partie.

1. Pas de forme indéterminée : $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$.
2. L'axe des abscisses est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
3. Là, il faut utiliser de la croissance comparée : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^t}{t^2}$, donc $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.
4. La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On calcule $f'(t) = \dfrac{e^t(1+t^2) - 2te^t}{(1+t^2)^2} = \dfrac{e^t(1-t)^2}{(1+t^2)^2}$.
5. La dérivée étant toujours positive (même si elle s'annule en $t = 1$), la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. Calculons tout de même $f(1) = \dfrac{e}{2}$ pour dresser le tableau suivant :

t	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(t)$		0	
f	0 ↗	$\frac{e}{2}$ ↗	$+\infty$

6. Pour alléger le calcul, posons $u(t) = e^t(1-t)^2$, ce qui donne $u'(t) = e^t(1-t)^2 - 2(1-t)e^t = e^t(t^2-1)$; et $v(t) = (1+t^2)^2$, donc $v'(t) = 4t(1+t^2)$. On peut alors écrire $f''(t) = \dfrac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v(t)^2} = \dfrac{e^t(t^2-1)(1+t^2)^2 - 4te^t(1-t)^2(1+t^2)}{(1+t^2)^4}$
$= \dfrac{e^t(t^2-1)(1+t^2) - 4te^t(1-t)^2}{(1+t^2)^3} = \dfrac{e^t(t^4-4t^3+8t^2-4t-1)}{(1+t^2)^3}$.
7. La fonction f'' s'annule si et seulement si $P_2(t) = t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 4t - 1 = 0$ (en anticipant les notations de la deuxième partie). Or, P_2 s'annule pour $t = 1$ (c'est évident avec la forme précédente du calcul de f'', et on peut écrire $P_2(t) = (t-1)(t+1)(1+t^2) + 4t(t-1)(1-t) = (t-1)(t^3+t^2+t+1+4t-4t^2) = (t-1)(t^3-3t^2+5t+1)$. Posons désormais $g(t) = t^3-3t^2+5t+1$, et calculons $g'(t) = 3t^2 - 6t + 5$. Cette dérivée est toujours positive (son discriminant est négatif), la fonction g est donc strictement croissante et effectue une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ses limites sont évidentes). En particulier, g s'annule exactement une fois, et cette valeur α est donc la seconde valeur d'annulation de f''.
8. On calcule $g(0) = 1 > 0$, et $g\left(-\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{1}{125} - \dfrac{3}{25} - 1 + 1 < 0$ (même pas besoin de simplifier pour s'en rendre compte !), donc g s'annule entre $-\dfrac{1}{5}$ et 0 (théorème des valeurs intermédiaires), ce qui prouve que $-\dfrac{1}{5} < \alpha < 0$.

9. Pour écrire la formule de Taylor à l'ordre 3, on a besoin de connaitre la dérivée troisième f''', ou plutôt de connaitre $f'''(0)$ (non, on ne s'embêtera pas à écrire explicitement $f^{(4)}$ dans le reste intégral !). Posons donc, comme tout à l'heure, $u(t) = e^t(t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 4t - 1)$, donc $u'(t) = e^t(t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 4t - 1 + 4t^3 - 12t^2 + 16t - 4) = e^t(t^4 - 4t^2 + 12t - 5)$. Autrement dit, $u(0) = -1$ et $u'(0) = -5$. Pour le dénominateur, $v(t) = (1+t^2)^3$, donc $v'(t) = 6t(1+t^2)^2$, soit $v(t) = 1$ et $v'(t) = 0$. On en déduit que $f'''(0) = \dfrac{u'(0)v(0) - u(0)v'(0)}{v^2(0)} = -5$. En remontant les calculs, $f''(0) = -1$, $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$. On peut donc écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 : $f(t) = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5}{6}x^3 + \displaystyle\int_0^t \dfrac{f^{(4)}(x)(x-t)^3}{6}\,dx$. En particulier, la tangente à la courbe en 0 a pour équation $y = 1 + x$ (et accessoirement, même si ça n'était pas demandé, la courbe devrait être en-dessous de cette tangente au voisinage de 0).
10. Au point d'abscisse 1, les calculs précédents prouvent qu'il y a une tangente horizontale. La courbe sera évidemment en-dessous de cette tangente à gauche de 1 et au-dessus à droite puisque f est strictement croissante. La courbe ressemble à ceci :



Deuxième partie.

1. On a bien entendu $P_0 = 1$, puis au vu des calculs de la première partie, $P_1 = (1 - X)^2 = X^2 - 2X + 1$, et $P_2 = X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 4X - 1$.
2. On suppose donc que $f^{(n)}(t) = \dfrac{e^t P_n(t)}{(1+t^2)^{n+1}}$, et dérivons cette expression pour obtenir $f^{(n+1)}(t) = \dfrac{e^t(P_n(t) + P_n'(t))(1+t^2)^{n+1} - 2(n+1)te^t P_n(t)(1+t^2)^n}{(1+t^2)^{2n+2}}$ $= \dfrac{e^t(P_n(t) + P_n'(t))(1+t^2) - 2(n+1)te^t P_n(t)}{(1+t^2)^{n+2}} = \dfrac{e^t P_{n+1}(t)}{(1+t^2)^{n+2}}$, en posant $P_{n+1}(t) = (1 + t^2)(P_n(t) + P_n'(t)) - 2(n+1)tP_n(t)$. L'initialisation ayant déjà été faite à la question précédente, la récurrence est achevée.
3. On peut faire une simple récurrence à nouveau. P_0 est évidemment à coefficients entiers, et si P_n l'est, P_n' aussi, et la formule obtenue à la question précédente prouve que P_{n+1} sera également à coefficients entiers.
4. L'énoncé nous demande juste de préciser, donc on peut se contenter de dire que $d°(P_n) = 2n$ et que le coefficient dominant vaut 1, sans plus de justification. Sinon, on fait encore une récurrence : c'est vrai au rang 0, et si on le suppose vrai au rang n, alors dans l'expression de P_{n+1}, seule le terme $t^2 P_n(t)$ sera de degré $2n+2$, et aura le même coefficient que le coefficient dominant de $P_n(t)$, ce qui achève la récurrence.

5. En remplaçant la variable par i dans notre relation de récurrence, et en utilisant bien sûr que $1+i^2=0$, on trouve $P_{n+1}(i) = -2(n+1)iP_n(i)$. On prouve alors par récurrence triviale que $P_n(i) = (-2i)^n n!$ (qu'on ne peut pas beaucoup plus simplifier).

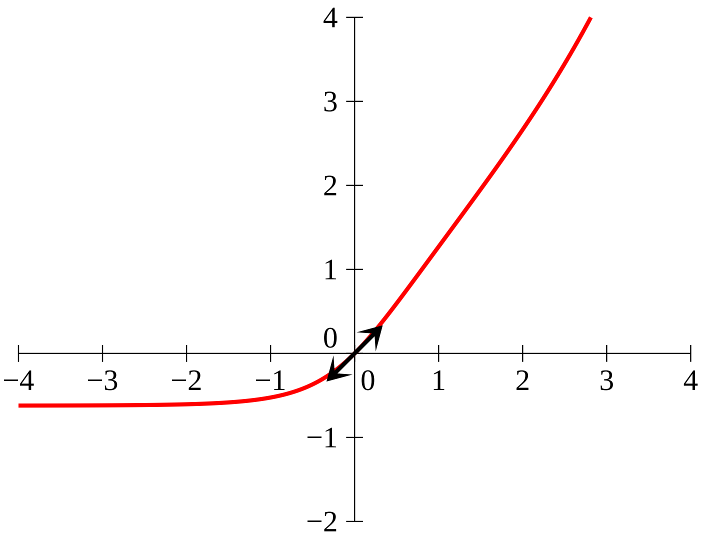
Troisième partie.

1. La fonction F ayant pour dérivée f qui est toujours positive, F est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Une fonction croissante admet une limite à gauche et à droite en tout point, et en particulier une limite en $-\infty$. Mais cette limite pourrait très bien être infinie. Mais en l'occurence, $\forall t \leq 0$, on a $e^t \leq 1$, donc $f(t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$. En intégrant entre 0 et x (attention, les bornes sont dans le mauvais sens puisque x est supposé négatif), on aura donc $F(x) \geq \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x)$. En particulier, on a toujours $F(x) \geq -\dfrac{\pi}{2}$ puisque la fonction arctangente et minorée par $-\dfrac{\pi}{2}$. elle a donc nécessairement une limite finie en $-\infty$.
3. La majoration $l \leq 0$ découle simplement du fait que F est croissante et que $F(0)=0$ par hypothèse. Pour la minoration, on procède comme dans la question précédente, mais avec une autre majoration de f : on peut simplement constater que $\dfrac{e^t}{1+t^2} \leq e^t$ (que t soit positif ou négatif ne change en l'occurrence strictement rien), donc, $\forall x \leq 0$, $F(x) \geq \displaystyle\int_0^x e^t\, dt = [e^t]_0^x = e^x - 1 \geq -1$, ce qui prouve que F est minorée par -1 et donc que $l \geq -1$ (notons qu'on aurait bien sûr pu faire directement ce calcul à la question précédente au lieu d'aller chercher des arctangentes).
4. On sait que $F(0)=0$ et $F'(0)=f(0)=1$, donc la tangente a pour équation $y=x$.
5. On peut commencer par appliquer la relation de Chasles pour écrire $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^x f(t)\, dt$, puis effectuer une IPP sur la deuxième intégrale, en posant $u(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, donc $u'(t) = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$, et $v'(t) = v(t) = e^t$. On trouve alors $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt + [f(t)]_0^x + \int_1^x \frac{2te^t}{(1+t^2)^2}\, dt = A + f(x) + 2J(x)$, en ayant posé $A = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt - f(0)$.
6. Les deux intégrales $J(x)$ et $K(x)$ étant des intégrales de fonctions positives (et les bornes étant dans le bon sens lorsque $x \geq 1$), elles sont positives. De plus, $(1+t^2)^2 \geq t^4$, donc $\dfrac{t}{(1+t^2)^2} \leq \dfrac{t}{t^4} = \dfrac{1}{t^3}$. En intégrant entre 1 et x, on obtient $0 \leq J(x) \leq K(x)$.
7. On va effectuer une IPP sur $K(x)$ en posant $u(t) = \dfrac{1}{t^3}$, donc $u'(t) = -\dfrac{3}{t^4}$, et $v'(t) = v(t) = e^t$. Puisqu'on nous demande de la justifier soigneusement, signalons donc que ces deux fonctions sont bien définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1,x]$, puisque x est supposé supérieur à 1 (on aurait un problème pour $x \leq 0$). On peut alors écrire $K(x) = \left[\dfrac{e^t}{t^3}\right]_1^x + \displaystyle\int_1^x \frac{3e^t}{t^4}\, dt$, soit $K(x) - 3L(x) = \dfrac{e^x}{x^3} - e$. Divisons tout par $\dfrac{e^x}{x^2}$ pour calculer la limite : $\dfrac{x^2(K(x)-3L(x))}{e^x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{ex^2}{e^x}$. Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{ex^2}{e^x} = 0$, ce qui suffit à prouver que $K(x) - 3L(x)$ est bien négligeable par rapport à $\dfrac{e^x}{x^2}$.
8. Découpons donc (on peut, $x^{\frac{3}{4}}$ se trouve entre 1 et x si $x \geq 1$), et majorons chacun des deux morceaux (l'intégrale est de toute façon minorée par 0). En majorant simplement e^t par $e^{x^{\frac{3}{4}}}$

sur l'intervalle $[1, x^{\frac{3}{4}}]$, on trouve $\displaystyle\int_1^{x^{\frac{3}{4}}} \frac{e^t}{t^4}\,dt \leqslant e^{x^{\frac{3}{4}}} \int_1^{x^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{t^4}\,dt = e^{x^{\frac{3}{4}}}\left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{e^{x^{\frac{3}{4}}}}{3} - \frac{e^{x^{\frac{3}{4}}}}{3x^{\frac{9}{4}}}$. Divisons ceci par $\dfrac{e^x}{x^2}$ pour tenter de calculer sa limite, on obtient $\dfrac{x^2}{3e^{x-x^{\frac{3}{4}}}} - \dfrac{1}{3x^{\frac{1}{4}}e^{x-x^{\frac{3}{4}}}}$. Le deuxième morceau tend manifestement vers 0 en $+\infty$, le premier peut s'écrire sous la forme $\dfrac{x^2}{3(x-x^{\frac{3}{4}})^2} \times \dfrac{(x-x^{\frac{3}{4}})^2}{e^{x-x^{\frac{3}{4}}}}$. Le premier quotient a pour limite $\dfrac{1}{3}$, et le deuxième tend bien vers 0 par croissance comparée ($x - x^{\frac{3}{4}}$ tendant vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$). Ouf, $\displaystyle\int_1^{x^{\frac{3}{4}}} \frac{e^t}{t^4}\,dt$ est négligeable par rapport à $\dfrac{e^x}{x^2}$! Passons au deuxième morceau, en majorant cette fois l'exponentielle par e^x : $\displaystyle\int_{x^{\frac{3}{4}}}^1 \frac{e^t}{t^4}\,dt \leqslant e^x\left[-\frac{1}{3t^3}\right]_{x^{\frac{3}{4}}}^1 = \frac{e^x}{3x^{\frac{9}{4}}} - \frac{e^x}{3x^3}$. Aucun problème ici pour prouver que la limite est nulle quand on divise par $\dfrac{e^x}{x^2}$. La somme des deux limites est donc nulle, ce qui prouve que $L(x)$ est négligable par rapport à $\dfrac{e^x}{x^2}$.

9. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2L(x)}{e^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(K(x)-3L(x))}{e^x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2K(x)}{e^x} = 0$, et en utilisant l'encadrement de la question 6, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2J(x)}{e^x} = 0$. En posant $g(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$, la question 5 permet d'affirmer que $\dfrac{F(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} + \dfrac{A}{g(x)} + 2\dfrac{J(x)}{g(x)}$. Les limites deux derniers morceaux sont nulles, et $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, qui a clairement pour limite 1 (quotient des termes de plus haut degré), ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = 1$.

10. On sait que F est croissante, a une limite finie (comprise entre -1 et 0) en $-\infty$, est proche de $\dfrac{e^x}{x^2}$ (donc à croissance rapide) en $+\infty$, et a pour tangente la droite d'équation $y = x$ en 0. C'est suffisant pour donner une allure de courbe :



Problème 2 : algèbre.

Partie I.

1. Le noyau de D est donc constitué des fonctions f vérifiant $f' = 0$, c'est-à-dire des fonctions constantes (qui appartiennent bien à l'espace E). On peut par exemple l'écrire sous la forme $\text{Vect}(1)$ pour le voir comme un sous-espace vectoriel de E.
2. Prenons donc comme première valeur $t_1 = 0$. Pour les deux autres, c'est un peu moins facile de trouver des valeurs sympa, mais $t_2 = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$, de façon à avoir $f_2(t_2) = e^{-\frac{t_2}{2}}$, et $f_3(t_2) = 0$ (le sinus vaut 1 et le cosinus s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$), puis $t_3 = -t_2$, pour avoir cette fois $f_2(t_3) = -e^{\frac{t_2}{2}}$ et $f_3(t_3) = 0$ (le sinus vaut -1 et le cosinus est toujours nul). Les réels a, b et c doivent donc vérifier le système de trois équations suivant : $\begin{cases} a + c = 0 \\ ae^{t_2} + be^{-\frac{t_2}{2}} = 0 \\ ae^{-t_2} - be^{-\frac{t_2}{2}} = 0 \end{cases}$. Les deux dernières équations impliquent que a et b sont à la fois de signe opposé (dans la deuxième équation, les deux exponentielles sont positives), et de même signe (à cause de la troisième équation), ce qui implique manifestement $a = b = 0$. On en déduit immédiatement $c = 0$ en exploitant la première équation, ce qui prouve que notre famille est libre.
3. Lorsque t tend vers $+\infty$, f_2 et f_3 ont une limite nulle alors que f_1 tend vers $+\infty$. Pour avoir $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$, on doit donc nécessairement avoir $a = 0$ (sinon la fonction ne tend pas vers 0 en $+\infty$ et n'est donc sûrement pas nulle). Il reste la condition $bf_2 + cf_3 = 0$, ce qui donne après simplification par $e^{-\frac{t}{2}}$ la condition $b\sin\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right) = -c\cos\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$, ce qui n'est possible que si $b = c = 0$ (par exemple pour des raisons de parité, ou simplement en rergant les valeurs en 0 et en $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$). Là encore, on conclut qu la famille $\mathcal{B}$ est libre. Il s'agit donc d'une base du sous-espace vectoriel G (elle en est une famille génératrice par définition), qui est de dimension 3.
4. Il suffit pour cela de prouver que les trois fonctions $D(f_1)$, $D(f_2)$ et $D(f_3)$ appartiennent à G. En effet, si c'est le cas, on pourra écrire toute fonction $g \in G$ sous la forme $g = af_1 + bf_2 + cf_3$ (puisque $\mathcal{B}$ est une base de G), puis on aura $D(g) = aD(f_1) + bD(f_2) + cD(f_3) \in G$ car G est stable par combinaisons linéaires en tant que sous-espace vectoriel de E. Calculons alors $D(f_1) : t \mapsto e^t$, donc $D(f_1) = f_1 \in G$; $D(f_2) : t \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$, soit $D(f_2) = -\dfrac{1}{2}f_2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}f_3$; et $D(f_3) : t \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$, soit $D(f_3) = -\dfrac{1}{2}f_2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}f_3$. Ces trois dérivées appartiennent bien à G, ce qui prouve la stabilité de G par D.
5. Les coordonnées découlent immédiatement des calculs de la question précédente, il suffit de les mettre en colonne pour écrire $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
6. On calcule d'abord $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (qui ressemble beaucoup à M, à un échange de signes près). Puis on obtient $M^3 = M \times M^2 = I$.
7. Surtout pas de pivot de Gauss pour cette question ! Il suffit de dire que $M \times M^2 = I$, donc M est inversible, et son inverse est M^2.

Partie III (oui, la partie II a disparu).

1. Pour que f soit solution de (Z), elle doit déjà être dérivable trois fois (sinon, l'équation n'a aucun sens). On peut alors prouver qu'elle est en fait dérivable n fois (pour tout entier naturel n), par récurrence. C'est vrait aux rangs 0, 1, 2 et 3. Supposons que f soit n fois dérivable, alors $f''' = f$ est elle-même n fois dérivable, ce qui prouve en fait que f est carrément $n+3$ fois dérivable, et a fortiori $n+1$ fois. Drôle de récurrence où on peut passer d'un seul coup de la propriété au rang n à celle au rang $n+3$. En tout cas, cela prouve qu'on peut dériver f autant de fois qu'on veut, et donc qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Si f est un polynôme non nul, f et f''' sont deux polynômes de degrés différents, donc ne peuvent pas être égaux. Allez hop, question suivante !
3. L'applciation T associe à une fonction f la fonction $((f')')' - f = f''' - f$. La fonction f est donc solution de (Z) si et seulement si $T(f) = 0$. De plus, si $f \in G$, on peut écrire $f = af_1 + bf_2 + cf_3$, et on sait que les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $D(f)$ peuvent être obtenues en effectuant la même combinaison linéaire sur $D(f_1)$, $D(f_2)$ et $D(f_3)$. Autrement dit, on peut écrire $D(f) = a'f_1 + b'f_2 + c'f_3$, où on a $M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ (si vous n'êtes pas convaincus, écrivez explicitement le calcul). De même, les coordonnées de $D \circ D(f)$ et celles de $D \circ D \circ D(f)$ seront obtenues en calculant $M^2 \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $M^3 \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (on démontrera de façon beaucoup plus générale ces résultats dans un futur chapitre d'algèbre linéaire). Or, on sait que $M^3 = I$, donc les coordonnées de $D \circ D \circ D(f)$ seront les mêmes que celles de F. Cela prouve que, si $f \in G$, on a $T(f) = f$, et donc que G est inclus dans le noyau de T.
   Pour ceux que la pseudo-démonstration précédente ne convainc pas : $T(f_1) = f_1$ est trivial ; $D(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$ donc $D \circ D(f_2) = -\frac{1}{2}D(f_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}D(f_3) = \frac{1}{4}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}f_3 - \frac{\sqrt{3}}{4}f_3 - \frac{3}{4}f_2 = -\frac{1}{2}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$, puis $D \circ D \circ D(f_2) = \frac{1}{4}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}f_3 + \frac{\sqrt{3}}{4}f_3 + \frac{3}{4}f_2 = f_2$; un calcul complètement similaire donne aussi $T(f_3) = f_3$, et on en déduit que $T(f) = f$ pour tout fonction f appartenant à G.
4. On a clairement $g' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = g$ en utlisant l'hypothèse que $f''' = f$.
5. Une équation différentielle triviale à résoudre : les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^t$, l'ensemble des solutions peut donc être écrit sous la forme $\mathrm{Vect}(f_1)$.
6. C'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Notons son équation caractéristique : $x^2 + x + 1 = 0$. Elle a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, et admet donc pour solutions $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions réelles de cette équation sont donc les fonctions $t \mapsto Ae^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + Be^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$, soit exactement $\mathrm{Vect}(f_2, f_3)$. La famille (f_2, f_3) est évidemment libre, donc c'est une base de cet espace de solutions.
7. On a déjà les solutions de l'équation homogène, il suffit de trouver une solution de l'équation particulière. Le second membre étant une exponentielle dont le coefficient n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut simplement chercher cette solution sous la forme $y_p : t \mapsto Ke^t$. Les dérivées successives étant identiques, on doit simplement avoir $K + K + K = \lambda$, soit $K = \frac{\lambda}{3}$. Les solutions de l'équation sont donc de la forme $t \mapsto Af_2 + Bf_3 + \frac{\lambda}{3}f_1$.
8. D'après la question 3, on a nécessairement $g(t) = \lambda e^t$, ce qui prouve que f est solution de l'équation qu'on vient de résoudre. Autrement dit, les solutions de (Z) sont les fonctions de

la forme $Af_2 + Bf_3 + \frac{\lambda}{3}f_1$. Quitte à renommer la dernière constante, on voit facilement que les solutions de (Z) sont tout simplement toutes les fonctions de G.

Petite note supplémentaire : si on identifie l'espace vectoriel G (qui est de dimension 3) à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, l'application D est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, qui est en fait une rotation autour de l'axe $\mathrm{Vect}(f_1)$ (les multiples de l'exponentielle sont laissés stables par cette rotation) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Ceci explique aisément pourquoi $D \circ D \circ D = \mathrm{id}$ sur cet espace !