Devoir Maison n°6

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 1er avril (sans poisson)

Ce sujet de révision est adapté d'un vieux sujet de concours (je vous rassure, c'est nettement moins vieux que 1988).

Problème 1 : analyse.

Première partie.

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{e^t}{1+t^2}$. Il est clair que f est de classe C^∞. Nous noterons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?
2. Qu'en déduisez-vous au sujet de $\mathcal{C}_f$?
3. Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
4. Expliciter $f'(t)$.
5. Dressez le tableau de variation de f.
6. Expliciter $f''(t)$.
7. Montrer que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α. Vous ne chercherez pas à calculer α.
8. Prouvez l'encadrement $-\dfrac{1}{5} < \alpha < 0$.
9. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour f à l'ordre 3 (c'est-à-dire en prenant $n = 3$) pour $a = 0$. En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
10. Tracez la courbe représentative de f. Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

Deuxième partie.

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$.

1. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$. Vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n.
2. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$. Vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'. Conclure la récurrence.
3. Montrer que P_n a tous ses coefficients dans $\mathbb{Z}$.
4. Précisez le degré et le coefficient dominant de P_n.
5. Donner une expression simple de $c_n = P_n(i)$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Troisième partie.

Notons $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Ainsi F est la primitive de f qui s'annule en 0.

1. Quel est le sens de variation de F ?
2. Montrer que $F(x)$ possède une limite l finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne chercherez pas à expliciter cette limite.
3. Prouver l'encadrement $-1 \leq l \leq 0$.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons $J(x) = \int_1^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2}\,dt$, $K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt$ et $L(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^4}\,dt$.

5. Prouver l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x.
6. Pour $x \geq 1$, placer les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.
7. Avec une intégration par partie soigneusement justifiée, montrer que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$ (on dit que $a(x)$ est négligeable par rapport à $b(x)$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 0$).
8. En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $[1, x^{\frac{3}{4}}] \cup [x^{\frac{3}{4}}, x]$, montrer que $L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
9. En déduire une fonction simple g telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = 1$.
10. Donner l'allure de la courbe représentative de F.

Problème 2 : algèbre.

Partie I.

Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et D l'application définie sur E par $D(f) = f'$. Soient $f_1 : t \mapsto e^t$, $f_2 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$. Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

1. Déterminer le noyau de D, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $f \in E$ tels que $D(f) = 0$. Vérifier que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E.
2. On souhaite prouver que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de E. Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle. L'étudiante Antoinette observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t. Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t, obtient un système de trois équations à trois inconnues a, b et c, qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure. Faites comme elle !
3. L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Faites comme elle ! Donner la dimension de l'espace G.
4. Montrer que G est stable par D.
5. On note M la matrice carrée d'ordre 3 dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des trois vecteurs $D(f_1)$, $D(f_2)$ et $D(f_3)$. Donner l'expression de M.
6. Calculer M^3.
7. Montrer que M est inversible, et, explicitez son inverse M^{-1}.

Partie III (oui, la partie II a disparu).

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons (Z). On notera T l'application définie sur l'espace vectoriel E par $T(f) = D \circ D \circ D(f) - f$.

1. Montrer que toute solution f de (Z) est C^∞.
2. Montrer que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de (Z).
3. Expliquer pourquoi l'ensemble des solutions de (Z) est le noyau de T, et prouver que G est inclus dans ce noyau.
4. Soit f une solution de (Z). Montrer que $g = f'' + f' + f$ est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
5. Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.
6. Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$. On vérifiera que l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel, dont on donnera une base.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.
8. Et maintenant, concluez !