

Devoir Maison n°5

PTSI B Lycée Eiffel

1er mars 2016

Exercice 1

1. Rappelons déjà que le nombre complexe j et son carré j^2 sont racines cubiques de l'unité, et donc que $1 + j + j^2 = 0$. On en déduit que $(x - j)(x - j^2) = x^2 - (j + j^2)x + j^3 = x^2 + x + 1$ (on peut évidemment retrouver ce résultat en résolvant simplement l'équation $x^2 + x + 1 = 0$). Autrement dit, la décomposition en éléments simples de la fonction g sera de la forme $\frac{1}{1 + x + x^2} = \frac{a}{x - j} + \frac{b}{x - j^2}$. En multipliant tout par $x - j$ dans cette égalité, on trouve $\frac{1}{x - j^2} = a + \frac{b(x - j)}{x - j^2}$, soit en prenant $x = j$, l'égalité $a = \frac{1}{j - j^2} = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2i \sin(\frac{\pi}{3})} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$. Un calcul complètement symétrique donne $b = \frac{1}{j^2 - j} = -a$, d'où la formule annoncée dans l'énoncé.
2. Quelle que soit la constante (réelle ou complexe) k , la fonction $x \mapsto \frac{1}{x - k}$ a pour dérivée n -ème $\frac{(-1)^n n!}{(x - k)^{n+1}}$. Prouvons-le par récurrence : c'est vrai au rang 0 puisque $\frac{(-1)^0 0!}{(x - k)^1} = \frac{1}{x - k}$, ce qui est bien l'expression de notre fonction. Supposons la formule vraie au rang n , et calculons $\left(\frac{(-1)^n n!}{(x - k)^{n+1}} \right)' = (-1)^n n! ((x - k)^{-n-1})' = (-1)^n n! \times (-n-1)(x - k)^{-n-2} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x - k)^{n+2}}$, exactement la formule souhaitée. La dérivée n -ème de la fonction g en découle trivialement.
3. Calculons donc $g'(x) = \frac{-2x - 1}{(1 + x + x^2)^2}$, puis $g''(x) = \frac{-2(1 + x + x^2)^2 + (2x + 1) \times 2(2x + 1)(1 + x + x^2)}{(1 + x + x^2)^4} = \frac{2((2x + 1)^2 - (1 + x + x^2))}{(1 + x + x^2)^3} = \frac{2(3x^2 + 3x)}{(1 + x + x^2)^3}$. On en déduit notamment que $P_1 = 2X + 1$ et $P_2 = 3X^2 + 3X$.
4. La récurrence est déjà initialisée aux rangs 0 (avec $P_0 = 1$), 1 et 2. Supposons la formule vraie au rang n , alors $g^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} n! \frac{P'_n(x)(1 + x + x^2)^{n+1} - (n+1)(2x + 1)P_n(x)(1 + x + x^2)^n}{(1 + x + x^2)^{2n+2}} = (-1)^{n+1} n! \frac{(1 + x + x^2)P'_n(x) - (n+1)(2x + 1)P_n(x)}{(1 + x + x^2)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} P_{n+1}(x)}{(1 + x + x^2)^{n+2}}$, en posant $P_{n+1}(x) = (2x + 1)P_n(x) - \frac{(1 + x + x^2)P'_n(x)}{n+1}$. La récurrence est achevée.
5. La première égalité est exactement celle obtenue à la question précédente, décalée de n à $n+1$. C'est pour la deuxième partie qu'on va avoir recours à la formule de Leibniz. Par définition, $(1 + x + x^2)g(x) = 1$. Appliquons la formule de Leibniz au produit de gauche au rang $n+2$ (on aura donc quelque chose de nul puisque la dérivée $(n+2)$ -ème de 1 est certainement nulle). On obtient $0 = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2}{k} (1 + x + x^2)^{(k)} g^{(n+2-k)}(x) = (1 + x + x^2)g^{(n+2)}(x) + (n+2)(2x + 1)g^{(n+1)}(x) + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \times 2g^{(n)}(x)$ (les dérivées suivantes de $1 + x + x^2$ sont toutes nulles). En reprenant l'expression générale des dérivées de g et en simplifiant par $(-1)^n (n+2)!$, on

trouve donc $\frac{P_{n+2}(x)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^{n+3}} - \frac{(2x+1)P_{n+1}(x)}{(1+x+x^2)^{n+2}} + \frac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par $(1+x+x^2)^{n+2}$ pour trouver $P_{n+2}(x) - (2x+1)P_{n+1}(x) + (1+x+x^2)P_n(x) = 0$, ce qui est exactement la formule souhaitée.

- On procède par récurrence double en utilisant la dernière formule prouvée, et en conjecturant que le degré de P_n sera égal à n et son coefficient dominant à n (cohérent avec les premières valeurs calculées). Au rang 0 et au rang 1, cette propriété est vraie, et tous les coefficients de nos polynômes sont bien entiers. Si on suppose P_n et P_{n+1} à coefficients entiers, $(2x+1)P_{n+1} - (x^2+x+1)P_n$ est manifestement à coefficients entiers, donc P_{n+2} aussi. De plus, si les degrés et coefficients dominants sont égaux à ce qu'on pense, on peut écrire $P_n = nX^n + Q_n$ et $P_{n+1} = (n+1)X^{n+1} + Q_{n+1}$, avec Q_n et Q_{n+1} de degré strictement inférieur à n et $n+1$ respectivement, le coefficient dominant de P_{n+2} sera alors obtenu en calculant $(2x+1)(n+1)x^{n+1} - (x^2+x+1)nx^n = (n+2)x^{n+2} + \dots$ des trucs dont on se fiche. Le degré est bien égal à $n+2$ et le coefficient dominant à $n+2$, ce qui achève la récurrence double.
- Pour obtenir les racines de P_n , il vaut nettement mieux revenir à l'expression complexe obtenue à la question 2. Au facteur a près, on a $P_n(x) = (x-j^2)^{n+1} - (x-j)^{n+1}$ (polynôme qui est bel et bien de degré n). Les racines de P_n vérifient donc $\frac{(x-j^2)^{n+1}}{(x-j)^{n+1}} = 1$. Posons donc

$X = \frac{x-j^2}{x-j}$, l'équation est alors équivalente à $X^{n+1} = 1$, ce qui revient à dire que X est une racine $n+1$ -ème de l'unité. On a donc $X = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$, pour k compris entre 0 et n . Essayons d'en déduire les valeurs de x correspondantes : $\frac{x-j^2}{x-j} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, donc $x(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = j^2 - je^{i\frac{2k\pi}{n}}$. La

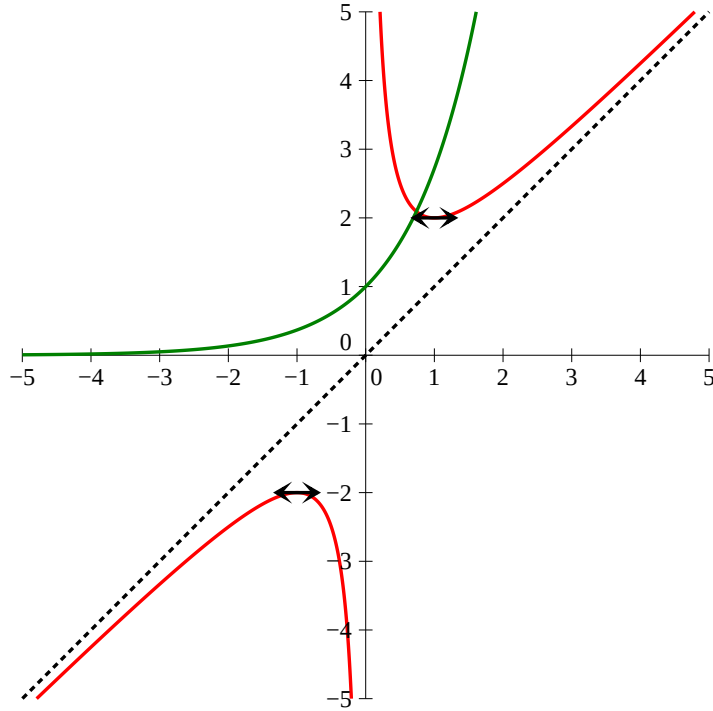
valeur $k=0$ est à exclure, pour les autres on obtient $x = \frac{j^2 - je^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{3})}}{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}})} = \frac{e^{i(\pi + \frac{k\pi}{n})}(e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{n})} - e^{i(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{3})})}{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}})} = -\frac{2i \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{n})}{2i \sin(-\frac{k\pi}{n})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}$, pour $k \in \{1, \dots, n\}$. Ces racines sont certainement des nombres réels.

Exercice 2

- La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. On calcule $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{x^2}$. En particulier, la dérivée s'annule pour $x = \pm 1$, et on a $f(1) = 2$ et $f(-1) = -2$. On aurait d'ailleurs pu remarquer que la fonction était impaire. Enfin, les limites sont triviales à calculer, et la droite d'équation $y = x$ est manifestement asymptote à la courbe représentative de f en $\pm\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	0	1	π
f	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

Et voici l'allure de courbe demandée (avec celle de l'exponentielle en vert) :



2. (a) Calculons (la fonction h est certainement de classe $\mathcal{C}^\infty$) : $h'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} = (2x - x^2 - 1)e^{-x}$, puis $h''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2 - 1)e^{-x} = (x^2 - 4x + 3)e^{-x}$.
- (b) Pour chacune des trois fonctions h , h' et h'' , la limite en $+\infty$ sera égale à 0 par croissance comparée (l'exponentielle l'emporte sur n'importe quel polynôme). En $+\infty$, ce sont de simples limites de produits ne posant aucun problème. Commençons par étudier le signe de h'' , qui est le même que celui de $x^2 - 4x + 3$. Ce trinôme a pour racines 1 (évidente) et 3, et on calcule $h'(1) = 0$ et $h'(3) = -4e^{-3} < 0$. On en déduit que h' est toujours négative (voir le tableau ci-dessous) et donc que h est décroissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$h''(x)$	+	0	-	+
h'	$-\infty$	0	$-4e^{-3}$	0
$h'(x)$	-	0	-	-
h	$+\infty$			0

- (c) On constate aisément que l'équation $x + \frac{1}{x} = e^x$ peut se mettre sous la forme $h(x) = x$ (il suffit de multiplier par xe^{-x} à gauche et à droite, et 0 n'est manifestement pas solution de l'équation). Or, en exploitant la question précédente, la fonction $x \mapsto h(x) - x$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée est égale à $h'(x) - 1 < 0$, et ses limites découlent de celles de h), et en particulier l'équation $h(x) - x = 0$ admet une solution unique. Comme $h(0) - 0 = 1 > 0$, la décroissance de notre fonction implique $\alpha > 0$. De plus, $h\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{\sqrt{e}} - 2\right)$. Or, $\sqrt{e} < 2$, donc $\frac{5}{\sqrt{e}} - 2 > 0$, et $\frac{1}{2} < \alpha$. De même, $h(1) - 1 = 2e^{-1} - 1 = \frac{2}{e} - 1 < 0$, donc cette fois $\alpha < 1$.

- (d) Sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on sait que h' est négative et croissante, donc $|h'(x)| \leq \left|h'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{e}}$.
3. (a) Il faudrait prouver que l'intervalle est stable par la fonction h . On a déjà calculé $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4\sqrt{e}} < 1$ car $\sqrt{e} > \frac{5}{4}$ (mais si, voyons, $e > \frac{25}{16}$ puisque $\frac{25}{16} < 2$), et $h(1) = \frac{2}{e} > \frac{1}{2}$ car $e < 4$. On prouve alors par récurrence triviale que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si c'est vrai au rang n , ce sera vrai au rang $n+1$ par stabilité de l'intervalle.
- (b) Il suffit d'appliquer l'IAF sur notre intervalle stable, entre $x = u_n$ et $y = \alpha$. Toutes les hypothèses ont déjà été vérifiées : u_n est dans l'intervalle, α aussi, et $|h'|$ est majorée par $\frac{1}{4\sqrt{e}}$ sur l'intervalle. On en déduit que $|h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{4\sqrt{e}}|u_n - \alpha|$, ce qui revient exactement à l'inégalité de l'énoncé puisque $h(\alpha) = \alpha$.
- (c) On procède bien sûr par récurrence. Au rang 0, $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} < 1$, donc l'inégalité est vérifiée. Si on la suppose vraie au rang n on peut appliquer le résultat de la question précédente puis l'hypothèse de récurrence pour affirmer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4\sqrt{e}}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4\sqrt{e}} \times \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{4^n} = \frac{e^{-\frac{n+1}{2}}}{4^{n+1}}$. La récurrence fonctionne.
- (d) D'après la question précédente, il suffit d'avoir $\frac{1}{(4\sqrt{e})^n} < 10^{-6}$, soit $(4\sqrt{e})^n > 10^6$. En passant tout au ln, on trouve alors $n(\ln(4) + \ln(\sqrt{e})) > 6 \ln(10)$, soit $n > \frac{6 \ln(10)}{2 \ln(2) + \frac{1}{2}} \simeq 7.3$. On a donc la valeur approchée souhaitée avec certitude à partir de $n = 8$.
4. (a) Sur cet intervalle comme sur n'importe quel autre, $h \circ h$ est croissante comme composée de deux fonctions décroissantes.
- (b) Toute suite (w_n) vérifiant la relation de récurrence $w_{n+1} = h \circ h(w_n)$ est monotone (ça se prouve par une récurrence triviale : si $w_0 \leq w_1$ par exemple, on aura $w_n \leq w_{n+1} \Rightarrow h \circ h(w_n) \leq h \circ h(w_{n+1})$, soit $w_{n+1} \leq w_{n+2}$; de même si $w_1 \geq 0$, la suite sera décroissante). C'est donc le cas des deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , puisque $u_{2(n+1)} = h \circ h(u_{2n})$, et $u_{2(n+1)+1} = h \circ h(u_{2n+1})$. Il ne reste donc qu'à déterminer la position relative des deux premiers termes de chaque sous-suite. Comme $u_0 = 1$ et $u_2 \leq 1$ (puisque 1 est la borne supérieure de l'intervalle stable trouvé précédemment), la sous-suite (u_{2n}) est décroissante. Au contraire, $u_1 \leq u_3$ (c'est moins facile à prouver sans utiliser bêtement des valeurs approchées, mais si on est très motivé, on peut étudier le signe de $h \circ h(x) - x$ pour s'en convaincre), donc (u_{2n+1}) est croissante. De plus, les deux suites tendent vers la même limite, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} - u_{2n+1} = 0$. Les deux suites sont bien adjacentes. En déduire la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis prouver que ces deux suites sont adjacentes (on pourra commencer par déterminer le signe de $u_2 - u_0$ et de $u_3 - u_1$).
- (c) Les deux suites étant adjacentes, on aura toujours, quel que soit l'entier n , $u_n < \alpha < u_{n+1}$ ou $u_{n+1} < \alpha < u_n$ (selon la parité de n). Dans tous les cas, $|u_{n+1} - u_n| > |\alpha - u_n|$, et la condition d'arrêt implique donc certainement que u_n est une valeur approchée de α à e près. Un programme possible (on importe le module math au préalable pour disposer des fonctions usuelles) :
- ```
def h(x) :
 return (x*x+1)*exp(-x)
```

```

def approx(e) :
 u,v,n=1,h(1),0
 while abs(u-v)>e :
 u,v,n=v,h(v),n+1
 return (n,u)

```

- (d) En lançant `approx(10**-6)`, Python me renvoie le couple  $(4, 0.7384324951837752)$ . On obtient donc  $n = 4$  (moins que ce qu'on avait eu plus haut!).
- (e) Par défaut, Python ne permet pas de faire du calcul avec une précision suffisante, mais il existe des modules qui corrigent ce petit défaut. On peut par exemple importer le module `decimal`, augmenter la précision à 25 décimales via la commande `getcontext().prec=25`, puis reprendre le même programme que précédemment en déclarant `u` sous la forme `u=Decimal('1')`, et en modifiant la définition de la fonction `h` pour retourner  $(x * x + 1) * \text{Decimal}(\text{str}(\exp(-x)))$ , mais ça ne suffit pas à atteindre la précision souhaitée car la définition de la fonction exponentielle ne doit pas être assez précise (la suite devient quasi-périodique au lieu de converger, je n'obtiens que les 13 premières décimales). S'il faut reprogrammer la définition de l'exponentielle, ça va devenir très compliqué, je donne donc simplement la valeur approchée à  $10^{-10}$  près, et la valeur de  $n$  correspondante :  $(7, 0.7384324006991096836315388)$  (on peut oublier les quinze dernières décimales affichées pour la valeur de  $u_7$ , qui sont a priori inintéressantes).