Devoir Maison n°5

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 1er mars

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à étudier les dérivées successives de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$. On posera dans tout l'exercice $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Déterminer un nombre complexe a tel que $f(x) = a\left(\dfrac{1}{x-j} - \dfrac{1}{x-j^2}\right)$.
2. En déduire que $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! a \left(\dfrac{1}{(x-j)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-j^2)^{n+1}}\right)$.
3. Calculer les deux premières dérivées de la fonction f (sans utiliser de nombres complexes cette fois-ci !).
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, on peut écrire $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \dfrac{P_n(x)}{(1+x+x^2)^{n+1}}$ (on pourra procéder par récurrence).
5. À l'aide de la formule de Leibniz, prouver que $P_{n+2}(x) = (2x+1)P_{n+1}(x) - \dfrac{x^2+x+1}{n+2}P'_{n+1}(x) = (2x+1)P_{n+1}(x) - (x^2+x+1)P_n(x)$.
6. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n, et prouver que P_n est à coefficients entiers.
7. Déterminer les racines du polynôme P_n, et vérifier qu'elles sont réelles.

Exercice 2

Dans cet exercice, on souhaite déterminer par une méthode numérique (du calcul approché, quoi) les valeurs des solutions de l'équation $(E) : e^x = x + \dfrac{1}{x}$. On définit pour cela les fonctions $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$, et $h : x \mapsto (x^2+1)e^{-x}$.

1. Faire une étude complète de la fonction f, et tracer une allure de sa représentation graphique. On tracera dans le même repère une allure de la courbe de la fonction exponentielle.
2. (a) Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$.
   (b) Dresser un tableau de variations complet (avec limites) de h et de h'.
   (c) Montrer que (E) admet une unique solution positive α, et que $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
   (d) Montrer que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, on a $|h'(x)| \leq \dfrac{1}{4\sqrt{e}}$.
3. On s'intéresse à la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
   (b) Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4\sqrt{e}}|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{e^{-\frac{n}{2}}}{4^n}$.
   (d) Déterminer une valeur de n pour lequelle u_n est une valeur approchée de α à 10^{-6} près.
4. On souhaite obtenir une méthode plus efficace pour approcher α à l'aide des termes de la suite.
   (a) Déterminer la monotonie de $h \circ h$ sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
   (b) En déduire la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis prouver que ces deux suites sont adjacentes (on pourra commencer par déterminer le signe de $u_2 - u_0$ et de $u_3 - u_1$).
   (c) Écrire un fonction Python **approx(e)** qui détermine une valeur approchée de α à e près en calculant les termes de la suite jusqu'à vérifier la condition $|u_{n+1} - u_n| < e$ (on expliquera pourquoi cette condition est correcte).
   (d) En utilisant le programme précédent, déterminer la valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de α à 10^{-6} près, et la comparer à celle obtenue à la question 3.*d*.
   (e) Donner une valeur approchée de α à 10^{-20} près (on pourra là aussi donner la valeur de n correspondante).