Devoir Maison n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

29 janvier 2016

Exercice 1

1. C'est l'ensemble des 4-listes de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$, il est donc de cardinal 4^n.
2. On a bien sûr $u_1 = 4$, les quatre mots a, b, c et d ne pouvant pas comporter la suite de lettres ab. Et $v_1 = 1$ puisque seul a convient. Ensuite, $u_2 = 15$ (tous les mots de longueur 2 conviennent sauf ab), et $v_2 = 4$, puisque les quatre mots aa, ba, ca et da conviennent. On a ensuite $u_3 = 56$ (tous les mots de trois lettres conviennent, à l'exception de aba, abb, abc, abd, aab, bab, cab et dab) et $v_3 = 15$ (on se contente de compléter les septs mots de deux lettres distincts de ab par un a : aaa, aca, ada, etc). Enfin, on aura $v_4 = 56$ (même principe, on reprend les 56 mots de trois lettres de contenant pas ab et on ajoute un a derrière), et $u_4 = 209$ (parmi les $4^4 = 256$ mots de longueur 4, il faut supprimer les 16 mots de la forme $xaby$, les seize mots de la forme $abxy$ (qui ne peuvent pas être les mêmes que les précédents), et les quinze mots restants de la forme $xyab$ (on a déjà supprimé le mot $abab$, il ne faut pas le supprimer deus fois), soit 47 mots qui ne conviennent pas).
3. Le plus simple est de constater que $v_{n+1} = u_n$. En effet, tout mot de longueur n ne contenant pas ab peut être complété en un mot de longueur $n+1$ finissant par un a (il suffit d'ajouter un a au bout), et ce mot ne peut pas non plus contenir ab puisqu'on ne peut avoir créé un ab en bout de mot (on a ajouté un a) et qu'il n'y en a pas avant par hypothèse. Réciproquement, tout mot se terminant par a de longueur $n + 1$ est obtenu de cette façon (il suffit de supprimer son a final), donc on a bien $v_{n+1} = u_n$.

   Essayons maintenant de calculer u_{n+1} à partir de u_n et de v_n. Pour chaque mot de longueur n ne contenant pas ab, on peut créer 4 mots de longueur $n + 1$ en complétant le mot par une des lettres a, b, c et d. On obtiendra ainsi un ensemble de $4u_n$ mots qui contient certainement tous les mots de longueur $n+1$ ne contenant pas ab (puisque ceux-ci donnent des mots de longueur n ne contenant pas ab si on leur supprime leur dernière lettre). Problème, ils contiennent aussi des mots contenant ab aux deux dernières positions. Plus précisément, ils en contiennent exactement v_n, puisque ce sont exactement les mots de longueur n finissant par un a (il y en a v_n) et complétés par un b qui vont poser problème. On a donc globalement $u_{n+1} = 4u_n - v_n$.
4. Puisque $v_{n+1} = u_n$, on peut écrire $u_{n+2} = 4u_{n+1} - v_{n+1} = 4u_{n+1} - u_n$. La suite est bien récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 4x + 1 = 0$. Son disriminant vaut $\Delta = 16 - 4 = 12$, et les racines sont $x_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$, et

$x_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$. On peut donc écrire $u_n = A(2+\sqrt{3})^n + B(2-\sqrt{3})^n$. Pour simplifier l'exploitation des conditions initiales, on peut considérer que $u_0 = 1$ (le mot vide ne contient pas la suite ab), ce qui donne une valeur cohérente de u_2 en exploitant la relation de récurrence. On a alors $u_0 = 1 = A + B$, et $u_1 = 4 = A(2+\sqrt{3}) + B(2-\sqrt{3})$. Autrement dit, $B = 1 - A$, et $4 = A(2+\sqrt{3} - 2+\sqrt{3}) + 2 - \sqrt{3}$, donc $A = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$, et $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Finalement, $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(2+\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(2-\sqrt{3})^n$.

5. La probabilité est simplement la proportion de mots contenant la suite ab dans l'ensemble complet de mots. D'après la question précédent, il y a $4^n - A(2+\sqrt{3})^n - B(2-\sqrt{3})^n$ mots contenant ab (inutile de garder les valeurs précises de A et B, ça n'influence pas le calcul), soit une probabilité égale à $p_n = \frac{4^n - A(2+\sqrt{3})^n - B(2-\sqrt{3})^n}{4^n} = 1 - A\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^n - B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^n$. Comme $2+\sqrt{3} < 4$ (et a fortiori $2-\sqrt{3} < 4$), chacune des deux suites géométriques a une limite nulle, et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$. Autrement dit, plus les mots sont longs, plus on se rapproche d'une quasi-certitude d'avoir ab dans un mot choisi au hasard.

Exercice 2

1. (a) Calculons donc : $AP = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Le calcul de PT donne exactement le même résultat.

   (b) Pour le calcul de l'inverse, on peut procéder par résolution de système : $\begin{cases} -x - 2y - 2z = a \\ -x - y - z = b \\ x - z = c \end{cases}$. La somme des deux dernières lignes donne immédiatement $-y = b + c$, soit $y = -b - c$. La différence des deux premières équations donne $-y + z = a - b$, soit $z = a - b + y = a - 2b - c$. On reporte enfin dans la dernière équation : $x = c + z = a - 2b$. La matrice P est donc bien inversible, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) On peut par exemple poser $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On constate sans difficulté que les deux matrices commutent (en fait, $DN = ND = 3N$). De plus, la matrice N est nilpotente, et on a même simplement $N^2 = 0$ (donc $N^k = 0$ pour tous les entiers $k \geq 2$). Appliquons alors la formule du binôme de Newton : $T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Rien de surprenant là-dedans, on savait déjà que cette matrice serait triangulaire supérieure, et les coefficients diagonaux sont les puissances n-èmes de ceux de T.

(d) D'après le calcul effectué à la première question, on a $AP = PT$, soit $A = PTP^{-1}$ (on sait que P est une matrice inversible). Prouvons par une récurrence rapide que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PT^nP^{-1}$. C'est donc vrai au rang 1 (et même au rang 0 de façon évidente), et si on le suppose au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve bien l'hérédité. Il ne reste plus qu'à effectuer le calcul : $PT^n = \begin{pmatrix} -2^n & -2.3^n & (6-2n)3^{n-1} \\ -2^n & -3^n & (3-n)3^{n-1} \\ 2^n & 0 & -3^n \end{pmatrix}$, puis $A^n = PT^nP^{-1} =$
$\begin{pmatrix} (6-2n)3^{n-1} - 2^n & 2^{n+1} + (4n-6)3^{n-1} & 2n.3^{n-1} \\ (3-n)3^{n-1} - 2^n & 2^{n+1} + (2n-3)3^{n-1} & n.3^{n-1} \\ 2^n - 3^n & 2.3^n - 2^{n+1} & 3^n \end{pmatrix}$.

(e) Je vais utiliser comme d'habitude la méthode du système : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & a \\ & & 3y & + & z & = & b \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$.
La combinaison $L_1 + 2L_3$ donne $6y + 8z = a + 2c$, on lui soustrait $2L_2$ et on trouve $6z = a + 2c - 2b$, soit $z = \frac{1}{6}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$. On reprend la deuxième équation pour trouver ensuite $y = \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}z = -\frac{1}{18}a + \frac{4}{9}b - \frac{1}{9}c$. Enfin, la dernière équation (par exemple) permet de conclure : $x = 2y + 3z - c = \frac{7}{18}a - \frac{1}{9}b - \frac{2}{9}c$. La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{18} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Si on applique naïvement la formule obtenue à la question précédente pour $n = -1$, cela donne $\begin{pmatrix} \frac{8}{9} - \frac{1}{2} & 1 - \frac{10}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} - \frac{1}{2} & 1 - \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, ce qui correspond exactement à la matrice A^{-1}. La formule reste donc valable pour $n = -1$ (et en fait plus généralement pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$).

(f) Écrivons donc la matrice $A - xI = \begin{pmatrix} 2-x & 2 & 2 \\ 0 & 3-x & 1 \\ -1 & 2 & 3-x \end{pmatrix}$. Si $x \neq 2$, on peut éliminer le coefficient en bas à gauche de la matrice en effectuant l'opération $L_3 \leftarrow (2-x)L_3 + L_1$, puis, si $x \neq 3$, on éliminera de même le coefficient du milieu de la troisième ligne. On obtiendra alors une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc inversible. Dans le cas où $x = 2$ la matrice est $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas inversible car l'opération $L_1 - 2L_2$ produit une ligne nulle. De même, $A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $L_1 - 2L_2 - L_3$ est une ligne nulle. La matrice $A - xI$ est donc inversible si et seulement si $x \notin \{2, 3\}$.

2. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Les relations de récurrence données par l'énoncé peuvent alors se mettre sous la forme très simple $X_{n+1} = A \times X_n$. On peut alors prouver par récurrence que $X_n = A^n X_0$: c'est trivialement vrai au rang 0, et en le supposant vrai au rang n, alors $x_{n+1} = AX_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0$. Puisqu'on sait par ailleurs que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, il suffit de multiplier cette matrice-colonne à gauche par la matrice A^n obtenue plus haut dans l'exercice pour obtenir les trois valeurs de u_n, v_n et w_n. On calcule ainsi $u_n = (6-2n)3^{n-1} - 2^n + 2^{n+1} + (4n-6)3^{n-1} - 2n.3^{n-1} = 2^n$; puis $v_n = (3-n)3^{n-1} - 2^n + 2^{n+1} + (2n-3)3^{n-1} - n.3^{n-1} = 2^n$; et enfin $w_n = 2^n - 3^n + 2.3^n - 2^{n+1} - 3^n = -2^n$.

3. (a) Supposons donc que $AN = NA$, alors $P^{-1}ANP = P^{-1}NAP$. On peut toujours introduire des produits PP^{-1} sans les modifier, ce qui donne par exemple $P^{-1}APP^{-1}NP = P^{-1}NPP^{-1}AP$, soit $TP^{-1}NP = P^{-1}NPT$, ce qui revient bien à dire que $P^{-1}NP \in \mathcal{C}(T)$. La réciproque est encore plus simple : si $P^{-1}NPP^{-1}AP = P^{-1}APP^{-1}NP$, alors $P^{-1}NAP = P^{-1}ANP$, donc $NA = AN$.

   (b) Posons $Z = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, et calculons tout bêtement $ZT = \begin{pmatrix} 2a & 3b & b+3c \\ 2d & 3e & e+3f \\ 2g & 3h & h+3i \end{pmatrix}$, et $TZ = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$. En égalisant les coefficients de la première ligne, on obtient immédiatement $b = 0$, puis $c = 0$. La deuxième donne $h = 0$, $e = i$ et $d + g = 0$, et la dernière donne $g = 0$ (qui implique donc $d = 0$), le reste étant redondant. Les coefficients a, e et f peuvent donc être choisis comme on le souhaite, et i doit être égal à e. Cela correspond à la forme donnée par l'énoncé.

   (c) D'après la question a, les matrices commutant avec A sont exactement celles de la forme PNP^{-1}, où N est de la forme précédente. On calcule donc $PN = \begin{pmatrix} -a & -2e & 2e-2f \\ -a & -e & e-f \\ a & 0 & -e \end{pmatrix}$, puis $PNP^{-1} = \begin{pmatrix} -a+2e-2f & 2a-2e+4f & 2f \\ -a+e-f & 2a-e+2f & f \\ a-e & -2a+2e & e \end{pmatrix}$. On peut bien écrire cette matrice sous la forme $aJ + eK = fL$, avec $J = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, et $L = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (d) L'existence est évidente puisqu'on sait que la matrice commute avec A (inutile même de donner les valeurs des coefficients). Pour prouver l'unicité, supposons qu'une matrice (quelconque) M puisse s'écrire de deux façons sous la forme $a_1J+b_1K+c_1L = a_2J+b_2K+c_2L$, ce qui implique alors que $\alpha J+\beta K+\gamma L = 0$, en posant $\alpha = a_1 - a_2$, $\beta = b_1 - b_2$ et $\gamma = c_1 - c_2$. Or, si cette égalité est vérifiée, on doit forcément avoir $\beta = 0$ pour que le coefficient en bas à droite de la matrice soit nul, puis $\gamma = 0$ en regardant les autres coefficients de la dernière colonne, et enfin $\alpha = 0$. Ce qui prouve que les deux façons d'écrire M étaient en fait les mêmes. Ce calcul est valable pour A^n également.