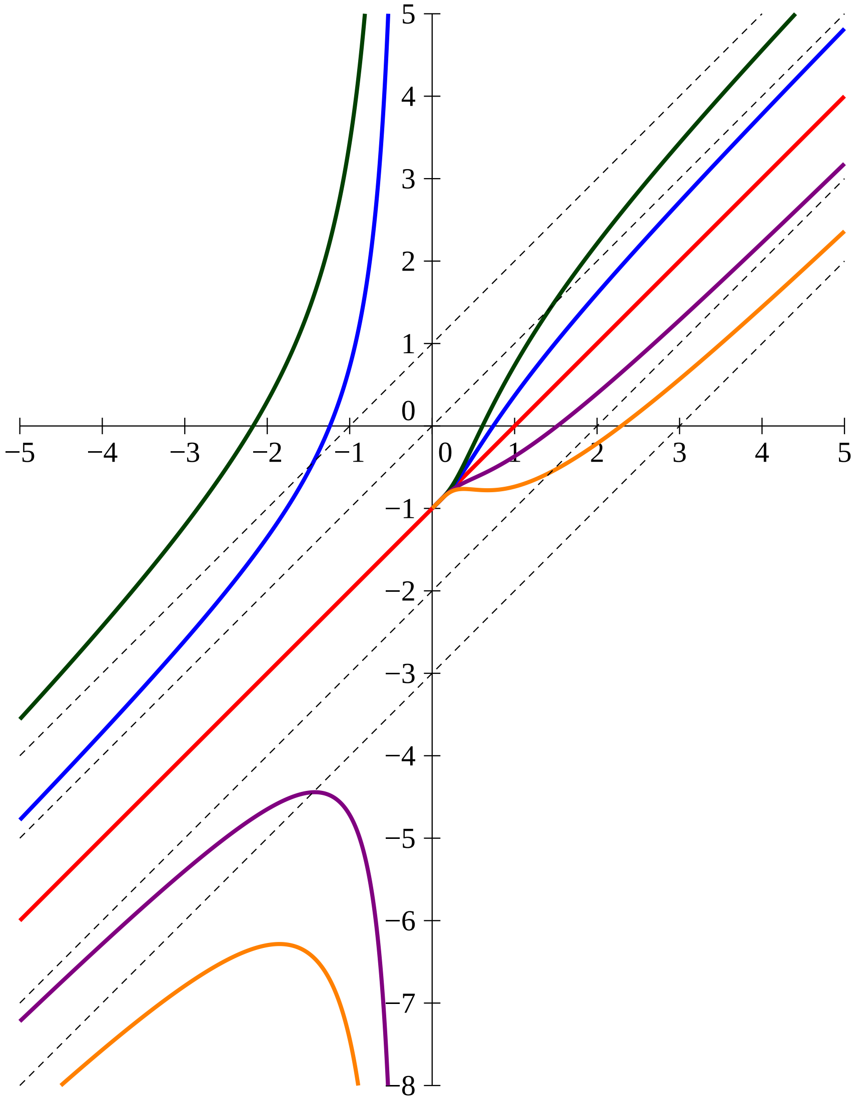
Devoir Maison n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 décembre 2015

Exercice 1

1. On commence par normaliser : $y' - \frac{1}{x^2}y = 1 + \frac{1-x}{x^2}$. Ceci nous force à résoudre de façon séparée sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Plaçons-nous d'abord sur $\mathbb{R}^{+*}$, les solutions de l'équation homogène associée à notre équation différentielle sont de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{1}{x}}$, pour $K \in \mathbb{R}$. Pour la solution particulière, on peut se rendre compte immédiatement que $y_p(x) = x - 1$ est solution triviale de l'équation. Sinon, on fait la variation de la constante, en posant $y_p(x) = K(x)e^{-\frac{1}{x}}$, ce qui donne $y_p'(x) = K'(x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}K(x)e^{-\frac{1}{x}}$. La fonction y_p est alors solution de l'équation si $K'(x)e^{-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1-x}{x^2}$, soit $K'(x) = e^{\frac{1}{x}} \times \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$. On peut effectuer une IPP en posant $u(x) = x^2 - x + 1$, soit $u'(x) = 2x - 1$, et $v'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, qui donne $v(x) = -e^{\frac{1}{x}}$. On trouve alors $K(x) = (x - x^2 - 1)e^{\frac{1}{x}} - \int (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$. Le plus simple à ce moment-là est quand même de se rendre compte que $(2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ est exactement la dérivée de $x^2 e^{\frac{1}{x}}$, et de conclure (on trouve évidemment la même solution particulière que ci-dessus). Les solutions complètes de l'équation sur $]0, +\infty[$ sont donc de la forme $y : x \mapsto x - 1 + Ke^{-\frac{1}{x}}$. Si on résout sur $]-\infty, 0[$, on trouve exactement les mêmes solutions. Pour avoir une solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faudrait que les formules précédentes donnent des limites (finies) en 0, et ce ne sera jamais le cas en 0^- sauf si $K = 0$. Pour ce qui se passe en 0^+, voire la deuxième question, la fonction $x \mapsto x - 1$ peut être prolongée par n'importe quelle solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour donner une solution définie sur $\mathbb{R}$.
2. En effet, $\lim\limits_{x \to 0^+} Ke^{-\frac{1}{x}} = 0$, donc toutes les fonctions ont une limite égale à -1 en 0^+. De plus, $y'(x) = 1 + \frac{Ke^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ a toujours pour limite 1 quand x tend vers 0^+ (par croissance comparée). Toutes nos solutions prolongées ont donc une dérivée de pente 1 en leur point d'abscisse 0 (et ont donc la même tangente puisqu'elles passent par le même point quand $x = 0$).
3. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} Ke^{-\frac{1}{x}} = K$, on peut écrire $y(x) = x - 1 + K + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x + K - 1$ est asymptote oblique à la courbe intégrale en $+\infty$. En fait, c'est exactement pareil en $-\infty$.
4. Allons-y : $y'(x) = 1 + \frac{Ke^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ est toujours positif lorsque $K \geq 0$. Si $K < 0$, y' est du signe de $g(x) = x^2 + Ke^{-\frac{1}{x}}$. Cette fonction ne s'étudie en fait pas bien du tout. Elle s'annule forcément une fois sur $]-\infty, 0[$, car y a pour limite $-\infty$ en 0^- si $K < 0$. On peut prouver qu'il n'y a qu'un seul changement de variations mais c'est compliqué (en gros, sauf à aller calculer la dérivée tierce de g, on ne s'en sort pas). C'est pire sur $]0, +\infty[$, où la dérivée s'annule entre 0 et 2 fois selon les valeurs de K. Une allure de quelques courbes ($K = 0$ en rouge, $K = 1$ en bleu, $K = 2$ en vert, $K = -1$ en violet et $K = -2$ en orange) :



Exercice 2

Posons donc $y(x) = z(\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on calcule alors $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}z'(\sqrt{x})$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{4x}z''(\sqrt{x})$. Si on introduit le changement de variable dans notre équation, on trouve $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) + z''(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0$, soit $z''(t) - z(t) = 0$. Cette équation se résout trivialement : $z(t) = Ae^t + Be^{-t}$, ce qui donne donc $y(x) = Ae^{\sqrt{x}} + Be^{-\sqrt{x}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Si on se place sur $]-\infty, 0[$, on va poser cette fois-ci $y(x) = z(\sqrt{-x})$, ce qui va donner $y'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}z'(\sqrt{-x})$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{4(-x)\sqrt{-x}}z'(\sqrt{-x}) + \dfrac{1}{4x}z''(\sqrt{-x})$. La simplification donne alors l'équation $z''(t) + z(t) = 0$, qui implique $y(x) = C\cos(\sqrt{-x}) + D\sin(\sqrt{-x})$, avec $(C, D) \in \mathbb{R}^2$. Ces solutions ont pour limites respectives $A + B$ et C quand x tend vers 0. De plus, en prenant la formule obtenue si $x > 0$, on aura $y'(x) = \dfrac{Ae^{\sqrt{x}-Be^{-\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x}}$. Pas évident de déterminer la limite de cette expression, mais on peut s'en sortir en étant un peu malins : $y'(x) = A \times \dfrac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{(B-A)e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. Or,

$\dfrac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{e^{-\sqrt{x}}-1}{-2\sqrt{x}}$. En utilisant la limite classique $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, on peut en déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = 1$. Pour que $y'(x)$ puisse avoir une limite en 0, on doit alors nécessairement avoir $B-A=0$ (sinon le deuxième terme a une limite infinie), et on a dans ce cas $\lim\limits_{x\to 0} y'(x) = A$. Le calcul est similaire en 0^- : $y'(x) = \dfrac{C\sin(\sqrt{-x}) - B\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{x}}$, et on trouve la condition similaire $D=0$, pour obtenir une limite finie simplement égale à $\dfrac{C}{2}$ (on utilise cette fois-ci la limite classique $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$). En combinant ceci à la condition $A+B=C+D$, on doit donc avoir $A=B=\dfrac{C}{2}$, ce qui revient à dire que la fonction y est définie sur $\mathbb{R}^+$ par la formule $y(x) = A(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}) = 2A\,\mathrm{ch}(\sqrt{x})$, et sur $\mathbb{R}^-$ par la formule $y(x) = 2A\cos(\sqrt{-x})$. Quitte à renommer la constante en posant $K=2A$, les solutions de l'équation définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto K\cos(h)(\sqrt{|x|})$ où il faut prendre un cos ou un cosh selon le signe de x !

Exercice 3

1. Supposons que $x \in \mathbb{R}$ soit solution de l'équation. En séparant parties réelle et imaginaire, on obtient les deux conditions $4x^6-4=0$ et $3x^5+3x=0$. Autrement dit, $x^6=1$, ce qui impose $x=\pm 1$, condition incompatible avec la deuxième équation. Il n'y a donc pas de solution réelle.
2. Il y a un sens très facile : si $z \in \mathbb{U}$, alors $z = e^{i\theta}$, et $z+\dfrac{1}{z} = e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \in \mathbb{R}$. Travaillons maintenant dans l'autre sens, en posant bêtement $z = a+ib$, on calcule alors $z+\dfrac{1}{z} = a+ib+\dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{(a+ib)(a^2+b^2)+a-ib}{a^2+b^2}$. Cette expression est réelle si elle a une partie imaginaire nulle, donc si $b(a^2+b^2)-b=0$, soit $b(a^2+b^2-1)=0$. Cela revient à dire que $b=0$, cas exclu par l'énoncé (puisque dans ce cas $z\in\mathbb{R}$), ou $a^2+b^2=1$, ce qui revient exactement à dire que $|z|^2=1$, donc $z \in \mathbb{U}$.
3. Posons $f(x) = x+\dfrac{1}{x}$. Comme la fonction f est paire, il suffit de prouver que $f(x) \geq 2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et on aura $f(x) \leq -2$ si $x<0$). Or, f est dérivable et $f'(x) = 1-\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$, qui est du signe de $x-1$ sur $]0,+\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$, et son minimum sur $]0,+\infty[$ est donc atteint en 1 et a pour valeur $f(1)=2$. Ceci suffit à prouver l'inégalité souhaitée.
4. (a) Le changement de variable peut s'écrire $z = ia$, on remplace dans l'équation initiale pour obtenir $-4a^6-3a^5-3a-4=0$. Quitte à changer tous les signes, a est donc solution de l'équation $4a^6+3a^5+3a+4=0$.
   (b) Développons brutalement le membre de gauche de l'équation proposée dans l'énoncé : $4\left(a^3+3a+\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{a^3}\right)+3\left(a^2+2+\dfrac{1}{a^2}\right)-12a-\dfrac{12}{a}-6 = 4a^3+3a^2+\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{4}{a^3} = \dfrac{4a^6+3a^5+3a+4}{a^3}$. Comme a ne peut pas être nul, cette équation est bien équivalente à la précédente.
   (c) La fonction g est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 12x^2+6x-12 = 6(2x^2+x-2)$. Le discriminant de la parenthèse est $\Delta = 1+16 = 17$, la dérivée s'annule donc pour les deux valeurs $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4} > -2$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4} < 2$ (les bornes sont faciles à prouver en utilisant que $4 < \sqrt{17} < 5$). La fonction g change donc deux fois de variations sur $[-2,2]$. En fait, les variations ne sont même pas très utiles si on arrive à

trouver suffisamment de valeurs de signe opposé dans l'intervalle (pour appliquer ensuite le théorème des valeurs intermédiaires). On calcule donc $g(-2) = -32+12+24-6 = -2 < 0$; $g(-1) = -4+3+12-6 = 5 > 0$; $g(0) = -6 < 0$ et $g(2) = 32+12-24-6 = 14 > 0$, ce qui suffit à prouver que g s'annule sur chacun des intervalles $]-2,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,2[$, et donc s'annule trois fois sur l'intervalle $[-2,2]$ (elle ne peut pas s'annuler plus en tant que polynôme de degré 3 et au vu de ses variations).

(d) Les question précédentes prouvent que $a + \dfrac{1}{a}$ doit être réel pour que z puisse être solution de notre équation. Or, si $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{R}$, on a vu plus haut que $a \in \mathbb{U}$, et alors $z = ia \in \mathbb{U}$ (la multiplication par i ne fera que modifier l'argument).

(e) Si on écrit $z = e^{i\theta}$, l'équation initiale devient $4e^{6i\theta}+3ie^{5i\theta}+3ie^{i\theta}-4 = 0$. En séparant partie réelle et imginaire, on obtient les deux conditions $4\cos(6\theta) - 3\sin(5\theta) - 3\sin(\theta) - 4 = 0$, et $4\sin(6\theta) + 3\cos(5\theta) + 3\cos(\theta) = 0$. Effectivement, on est bien contents de ne pas avoir à résoudre ce système !