Devoir Maison n°3

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 8 décembre 2015

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $x^2y' - y = x^2 - x + 1$.

1. Résoudre l'équation sur chacun des intervalles sur lequel cela a un sens. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
2. Vérifier que toutes les solutions définies sur $]0, +\infty[$ sont prolongeables par continuité en 0, et déterminer la limite de leur dérivée quand x tend vers 0. Que peut-on en déduire ?
3. Étudier les asymptotes des fonctions solutions de l'équation différentielle.
4. Étudier les variations des solutions, et tracer une allure de quelques courbes intégrales dans un même repère.

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ à l'aide du changement de variables $t = \sqrt{x}$. Résoudre cette même équation sur $\mathbb{R}^{-*}$ en utilisant une méthode analogue. En étudiant les limites des fonctions solutions et de leur dérivée en 0, déterminer les solutions de l'équation différentielle qui sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère dans tout cet exercice l'équation $4z^6 + 3iz^5 + 3iz - 4 = 0$.

1. Montrer que l'équation n'admet pas de solution réelle.
2. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, montrer que $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geq 2$.
4. Soit z une solution de l'équation initiale, et $a = -iz$.
   (a) Donner une équation vérifiée par a.
   (b) Montrer que a est solution de l'équation $4\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 - 12\left(a + \dfrac{1}{a}\right) - 6 = 0$.
   (c) En étudiant la fonction $g : x \mapsto 4x^3 + 3x^2 - 12x - 6$, vérifier que l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans l'intervalle $] - 2, 2[$.
   (d) Prouver que l'équation initiale n'admet que des solutions appartenant à $\mathbb{U}$.
   (e) En écrivant ces solutions sous la forme $e^{i\theta}$, écrire un système d'équations trigonométriques sur l'angle θ équivalent à notre équation (on ne cherchera pas à le résoudre !).