Devoir Maison n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

3 novembre 2015

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à trouver une belle formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)(k+5)}$.

1. Pour éviter l'identification un peu lourde, on peut utiliser les magouilles vues dans le cours d'intégration :
   - On multiplie tout par k pour obtenir $\dfrac{1}{(k+2)(k+5)} = a + \dfrac{bk}{k+2} + \dfrac{ck}{k+5}$, puis on évalue cette égalité pour $k=0$ et on trouve immédiatement $a = \dfrac{1}{10}$.
   - De même, en multipliant tout par $k+2$ puis en posant $k=-2$, on trouve $b = \dfrac{1}{(-2)\times(-2+5)} = -\dfrac{1}{6}$.
   - Enfin, on multiplie par $k+5$ et on pose $k=-5$ pour trouver $c = \dfrac{1}{(-5)\times(-5+2)} = \dfrac{1}{15}$.

   Conclusion : $\dfrac{1}{k(k+2)(k+5)} = \dfrac{1}{10k} - \dfrac{1}{6(k+2)} + \dfrac{1}{15(k+5)}$.
2. Allons-y pour un très beau télescopage en posant S_n la somme à calculer, et en constantant bien entendu que $\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{15} = 0$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} + \frac{1}{15}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+5} \\
&= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{6}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} + \frac{1}{15}\sum_{k=6}^{n+5}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}\sum_{k=6}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{18} - \frac{1}{24} - \frac{1}{30} - \frac{1}{6}\sum_{k=6}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{6(n+2)} \\
&\quad + \frac{1}{15}\sum_{k=6}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{15(n+1)} + \frac{1}{15(n+2)} + \frac{1}{15(n+3)} + \frac{1}{15(n+4)} + \frac{1}{15(n+5)} \\
&= \frac{60+30+20+15+12}{600} - \frac{20+15+12}{360} - \frac{1}{10(n+1)} - \frac{1}{10(n+2)} \\
&\quad + \frac{1}{15(n+3)} + \frac{1}{15(n+4)} + \frac{1}{15(n+5)} \\
&= \frac{22}{225} - \frac{1}{10(n+1)} - \frac{1}{10(n+2)} + \frac{1}{15(n+3)} + \frac{1}{15(n+4)} + \frac{1}{15(n+5)}
\end{aligned}$$

Je vous passe les détails de la simplification de la constante à gauche, ce n'est pas très intéressant. Pour les termes restants qui dépendent de n, ça n'a franchement aucun intérêt de les mettre au même dénominateur, mais si on y tient vraiment, on devrait obtenir : $S_n = \dfrac{22}{225} - \dfrac{15n^3 + 140n^2 + 405n + 352}{30(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$.

3. Il vaut nettement mieux utiliser la première forme obtenue et donc démontrer par récurrence la propriété P_n : $S_n = \dfrac{22}{225} - \dfrac{1}{10(n+1)} - \dfrac{1}{10(n+2)} + \dfrac{1}{15(n+3)} + \dfrac{1}{15(n+4)} + \dfrac{1}{15(n+5)}$.
Commençons tout de suite par signaler que, pour passer de S_n à S_{n+1}, on ajoutera un terme égal à $\dfrac{1}{(n+1)(n+3)(n+6)} = \dfrac{1}{10(n+1)} - \dfrac{1}{6(n+3)} + \dfrac{1}{15(n+6)}$ en reprenant les calculs de la première question de l'exercice.

   Vérifions que P_1 est vraie : lorsque $n = 1$, $S_1 = \dfrac{1}{1 \times 3 \times 6} = \dfrac{1}{18}$, et $\dfrac{22}{225} - \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{75} + \dfrac{1}{90} = \dfrac{22}{225} - \dfrac{5}{60} + \dfrac{15+12+10}{900} = \dfrac{88}{900} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{37}{900} = \dfrac{125}{900} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{5}{36} - \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{18}$. Oh, c'est fou, ça marche !

   Passons à l'hérédité, qui est en fait facile : $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+3)(n+6)} = \dfrac{22}{225} - \dfrac{1}{10(n+1)} - \dfrac{1}{10(n+2)} + \dfrac{1}{15(n+3)} + \dfrac{1}{15(n+4)} + \dfrac{1}{15(n+5)} + \dfrac{1}{10(n+1)} - \dfrac{1}{6(n+3)} + \dfrac{1}{15(n+6)} = \dfrac{22}{225} - \dfrac{1}{10(n+2)} - \dfrac{1}{10(n+3)} + \dfrac{1}{15(n+4)} + \dfrac{1}{15(n+5)} + \dfrac{1}{15(n+6)}$, ce qui prouve exactement la propriété P_{n+1} (et bravo à ceux qui auront fait le calcul après avoir tout mis au même dénominateur). Par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont donc vraies pour $n \geq 1$.

Exercice 2

1. Les fonctions f_n sont définies sur $]0, +\infty[$ (puisque $n \neq 0$). Quelle que soit la valeur de n, on aura $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$ par croissance comparée. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée). Il ne peut par contre jamais y avoir d'asymptote oblique en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^n}{\sqrt{x}} = 0$.

   La fonction f_n est dérivable sur son domaine de définition, et $f_n'(x) = \dfrac{(\ln(x))^n}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \times \dfrac{n(\ln(x))^{n-1}}{x} = \dfrac{(\ln(x))^n + 2n(\ln(x))^{n-1}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(\ln(x))^{n-1}(\ln(x) + 2n)}{2\sqrt{x}}$. Le numérateur s'annule lorsque $\ln(x) = 2n$, soit $x = e^{-2n}$. Attention également au facteur $(\ln(x))^{n-1}$ qui change de signe en 1 lorsque n est pair. Notons également en passant que notre dérivée a toujours une limite infinie quand x tend vers 0, ce qui justifie la présente d'une tangente verticale en 0 si on prolonge par continuité la fonction f_n en posant $f_n(0) = 0$. On calcule $f_n(e^{-2n}) = e^{-n} \times (-2n)^n = \left(-\dfrac{2n}{e}\right)^n$. Cette valeur est négative quand n est impaire et positive quand n est pair. On peut alors dresser le tableau de variations suivant lorsque n est pair :

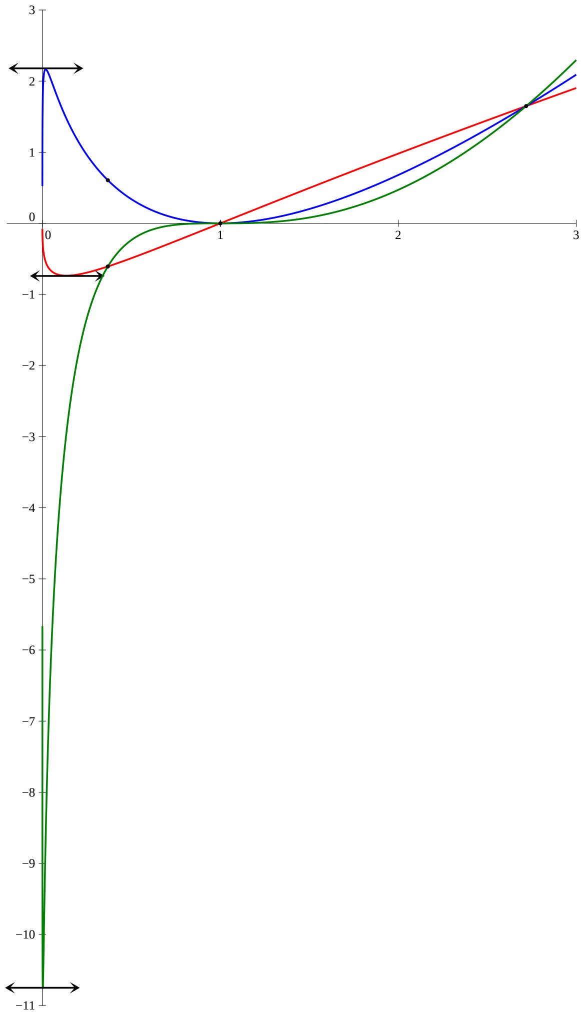
x	0		e^{-2n}		1		$+\infty$
$\ln(x)^{n-1}$	||	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
f_n	0	$\nearrow$	$(\frac{2n}{e})^n$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Et lorsque n est impair :

x	0		e^{-2n}		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	
f_n	0	$\searrow$	$(-\frac{2n}{e})^n$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. On calcule $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sqrt{x}(\ln(x))^n(\ln(x) - 1)$. Lorsque n est pair, cette différence est du signe de $\ln(x) - 1$, et la courbe $\mathcal{C}_{n+1}$ est donc en-dessous de $\mathcal{C}_n$ sur $]0, e]$, mais au-dessus sur $[e, +\infty]$. Toutes les courbes se coupent bien sûr au point de coordonnées $(1, \sqrt{e})$ Si n est impair, $\mathcal{C}_{n+1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$ sur $[e, +\infty[$ et sur $]0, 1]$, et en-dessous sur $[1, e]$ (les deux courbes se coupant bien sûr au point de coordonnées $(1, 0)$). De même, $f_{n+2}(x) - f_n(x) = \sqrt{x}(\ln(x))^n(\ln^2(x)-1)$. On a les mêmes positions relatives que ci-dessus sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Sur l'intervalle $]0, 1]$, si n est pair, $\mathcal{C}_{n+2}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_n$ sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$, et en-dessous sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, avec un point d'intersection de coordonnées $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. Si n est impair, c'est le contraire, et le point d'intersection se trouve cette fois-ci en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

3. Quelques valeurs utiles pour tracer les courbes : pour les intersections, $\frac{1}{e} \simeq 0.36$ et $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0.6$. Pour les extrema, $e^{-2} \simeq 0.14$, $e^{-4} \simeq 0.018$, $e^{-6} \simeq 0.0025$; et $-\frac{2}{e} \simeq -0.74$, $\left(\frac{4}{e}\right)^2 \simeq 2.17$ et $\left(-\frac{6}{e}\right)^3 \simeq -10.75$. On ne verra pas grand chose aux variations autour de 0 car elles sont trop brutales, concentrons-nous donc plutôt sur les potisions relatives. Sur le graphe ci-dessous, $\mathcal{C}_1$ est en rouge, $\mathcal{C}_2$ en bleu et $\mathcal{C}_3$ en vert :



4. La fonction f_n étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$, elle y effectue une bijection vers l'intervalle image $[0,+\infty[$. En particulier, l'équation $f_n(x)=1$ admet bien une unique solution sur $[1,+\infty[$. Comme $f_n(1)=0$ et $f_n(e)=\sqrt{e}>1$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors l'existence d'une solution à cette même équation dans l'intervalle $[1,e]$, ce qui prouve que $\alpha_n \in [1,e]$ puisqu'il s'agit de l'unique solution plus grande que 1 de toute façon.
5. Par définition, $f_n(\alpha_n)=1$, ce qui signifie que $\sqrt{\alpha_n}(\ln(\alpha_n))^n=1$. On en déduit aisément que $f_{n+1}(\alpha_n)=\sqrt{\alpha_n}(\ln(\alpha_n))^{n+1}=\ln(\alpha_n)$. Or, cette valeur est inférieure ou égale à 1 puisque $\alpha_n \leq e$. On en déduit que $f_{n+1}(\alpha_n) \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ (qui est égal à 1 par définition), ce qui prouve en utilisant la croissante de f_{n+1} sur l'intervalle $[1,e]$ que $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$. Autrement dit, la suite (α_n) est bien croissante. Étant une suite croissante et majorée par e, elle converge nécessairement vers un réel $l \in [1,e]$. Supposons par l'absurde que $l \neq e$, alors $\ln(l)<1$ et $\lim_{n\to+\infty}(\ln(l))^n=0$, ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n)=0$. C'est évidemment contradictoire avec le fait que $f_n(\alpha_n)$ est toujours égal à 1. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=e$.

Exercice 3

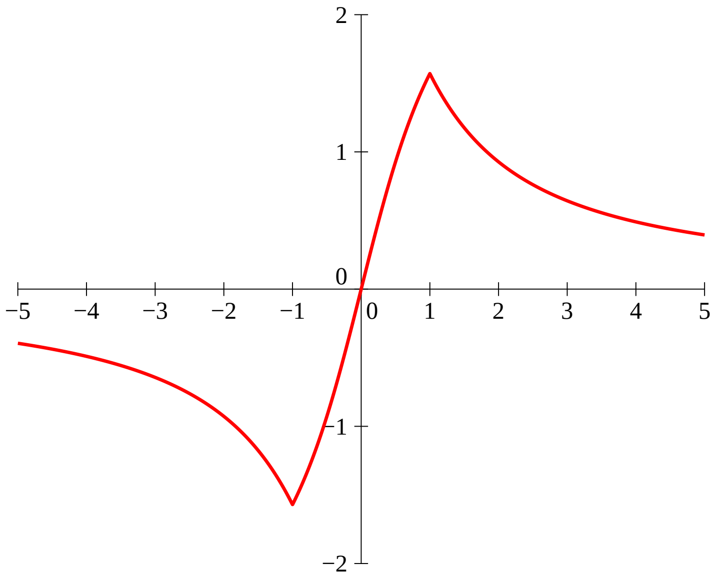
1. La condition pour que x appartienne au domaine de définition de f est $\dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1,1]$, ou encore $-1-x^2 \leq 2x \leq 1+x^2$ (on peut multiplier par $1+x^2$ qui est toujours positif). Autrement dit, on doit avoir simultanément $-1-2x-x^2 \leq 0$, soit $-(1+x)^2 \leq 0$, ce qui est toujours vrai ; et $1-2x+x^2 \geq 0$ soit $(1-x)^2 \geq 0$, ce qui est toujours vrai aussi. Finalement,

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$. Qui plus, est $\dfrac{2x}{1+x^2}$ prend les valeurs 1 ou -1 uniquement si $x = 1$ ou $x = -1$ (il faut annuler $(1-x)^2$ ou $(1+x)^2$).

2. Ce qui se trouve dans l'arcsin est impair, donc g est impaire.
3. Les calculs de la première question prouvent que g est dérivable partout sauf quand $x = 1$ ou $x = -1$ (puisque arcsin elle-même est dérivable sur $]-1,1[$). En posant $g(x) = \arcsin(u(x))$, avec $u(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, on peut alors calculer $u'(x) = \dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, puis $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4+2x^2-4x^2}} = \dfrac{2(1-x^2)}{1+x^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}$. Si $1-x^2 \geq 0$, autrement dit sur $]-1,1[$, on peut simplifier sous la forme $g'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{1+x^2} \times \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{2}{1+x^2}$. Sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, le signe change et on trouve $g'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$.
4. Sur $[0,1]$ (on peut prendre l'intervalle fermé, par passage à la limite, la formule restera correcte car g est une fonction continue), on peut affirmer que $g(x) = 2\arctan(x) + k$, pour une certaine constante k. Comme $\arctan(0) = 0$, et $g(0) = \arcsin(0) = 0$, on en déduit $k = 0$ et $g(x) = 2\arctan(x)$. Sur $[1,+\infty[$, on a $g(x) = -2\arctan(x) + k'$, pour une autre constante k'. On sait que $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $g(1) = \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$, donc $k' = \pi$, et $g(x) = -2\arctan(x) + \pi$. Remarquons que, par imparité de g, la formule obtenue sur $[0,1]$ reste vraie sur $[-1,0]$, et sur $]-\infty,-1]$, on aura $g(x) = -2\arctan(x) - \pi$.
5. On a très envie de poser $x = \tan(\theta)$ pour simplifier l'expression de g. On peut toujours effectuer ce changement de variable quel que soit x réel, avec un angle θ qui appartiendra par exemple à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$. Si on se retreint à $x \in [0,1]$, cela correspond à $\theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$. On peut alors écrire $\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = 2\tan(\theta)\cos^2(\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$ (on a utilisé successivement les deux formulations de la dérivée de la tangente, puis écrit la tangente comme quotient du sinus par le cosinus, et enfin reconnu une formule de duplication). On en déduit que $g(x) = \arcsin(\sin(2\theta))$, avec $2\theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut simplifier pour trouver $g(x) = 2\theta = 2\arctan(x)$ (puisque l'angle θ est bien dans l'intervalle image de la fonction arctangente).
6. On sait que la fonction arctan est croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui donne facilement les variations de la fonction g. On utilise aussi l'imparité pour compléter le tableau, la seule chose restant à calculer est la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$. On l'obtient sans problème avec la forme initiale ou avec la forme simplifiée : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. D'où le tableau complet suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

7. En voila une (attention, il n'y a pas de tangente horizontale en 1 et en -1, la fonction n'est pas dérivable en ces points) :



8. (a) Posons $h(x) = g(x) - \arccos(x)$. La fonction g étant croissante sur $[0, 1]$ et arccos décroissante sur ce même intervalle, h est croissante sur $[0, 1]$. Elle y est également continue. De plus, $h(0) = g(0) - \arccos(0) = -\frac{\pi}{2}$, et $h(1) = g(1) - \arccos(1) = \frac{\pi}{2}$. La fonction h effectue donc une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. En particulier, elle s'annule une fois exactement sur l'intervalle $[0, 1]$, ce qui prouve que l'équation $g(x) = \arccos(x)$ admet une seule solution sur cet intervalle (qui ne peut évidemment être égale ni à 0 ni à 1 vu les calculs effectués précédemment).

   (b) Posons donc $y = 2\arctan(x)$, on peut écrire $\cos^2(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}$. On utilise ensuite une formule de duplication : $\cos(2y) = 2\cos^2(y) - 1 = \frac{2}{1 + x^2} - 1 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

   (c) Par définition (et en utilisant la forme simplifiée de la fonction g), on a $2\arctan(\beta) = \arccos(\beta)$. On peut composer par la fonction cos pour en déduire que $\cos(2\arctan(\beta)) = \beta$, soit en exploitant la question précédente $\frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2} = \beta$, ou encore $1 - \beta^2 = \beta + \beta^3$, ce qui implique bien $\beta^3 + \beta^2 + \beta = 1$.